



*Российская Академия Наук*

# **А АВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА**

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

**6**

И Ю Н Ъ

**Москва**

**2024**

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Родионов И.В.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,  
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,  
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,  
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,  
Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г.,  
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),  
Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В.,  
Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В.,  
Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,  
Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),  
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2024 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Национальный исследовательский университет  
«Московский физико-технический институт», Долгопрудный)

## НЕХРУПКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ<sup>2</sup>

Рассматривается задача фильтрации для линейных систем, подверженных постоянно действующим внешним возмущениям, при этом качество фильтрации характеризуется размером ограничивающего эллипсоида, содержащего оцениваемый выход системы. Предложен регулярный подход к решению задачи нехрупкой фильтрации, состоящей в синтезе матрицы фильтра, которая выдерживает допустимые вариации своих коэффициентов. Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволило переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести ее к параметрической задаче полуопределенного программирования, легко решаемой численно.

Статья продолжает серию работ автора, посвященную вопросам фильтрации при неслучайных ограниченных внешних возмущениях и погрешностях измерений.

*Ключевые слова:* линейная система управления, внешние возмущения, фильтрация, нехрупкость, наблюдатель Люенбергера, линейные матричные неравенства, инвариантные эллипсоиды.

DOI: 10.31857/S0005231024060011, EDN: XXSIRM

### 1. Введение

Задача фильтрации, состоящая в оценке состояния динамической системы по измерениям, при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана. Однако во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным: часто известно лишь, что возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными; в этом случае можно строить *гарантированные* оценки состояний. Такой подход восходит к работам Виценхаузена, Бертсекаса и Родеса, Швеппе [1]; в отечественных работах [2, 3] была разработана эллипсоидальная техника фильтрации.

Позже, на основе техники линейных матричных неравенств [5, 6] и концепции инвариантных эллипсоидов, автором настоящей статьи совместно с

<sup>1</sup> Окончание тематического номера 5, 2024.

<sup>2</sup> Результаты исследований, представленные в разделах 4 и 5, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

Б.Т. Поляком в [4] была исследована задача фильтрации для стационарных задач при ограниченных неслучайных возмущениях. При этом в классе линейных стационарных фильтров проблема оказалась полностью разрешимой: был построен оптимальный фильтр и получена равномерная оценка состояния: ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид для всех моментов времени. Эта тематика впоследствии была развита в [7–9].

С другой стороны, в систему управления неизбежно привносится неопределенность, обусловленная неточностью технической реализации регулятора или необходимостью настройки его параметров в процессе эксплуатации. В [10] было показано, что малые возмущения коэффициентов оптимального регулятора могут приводить к потере им свойства стабилизируемости. Это явление получило название *хрупкости*, впоследствии оно исследовалось в разнообразных постановках задач; см., например, [11]. В [12, 13] был предложен подход к проблеме построения т.н. *нехрупких регуляторов* – т.е. выдерживающих вариации своих параметров, – применительно к задаче подавления неслучайных ограниченных возмущений.

Настоящая статья продолжает обе эти линии исследований. В ней предлагается регулярный подход к решению задачи *нехрупкой фильтрации*, состоящей в синтезе матрицы фильтра, которая выдерживает *допустимые* вариации своих коэффициентов. Оказывается, что даже малые возмущения матрицы оптимального фильтра могут нарушать инвариантность эллипсоида (полученного в предположении ее точной реализации), содержащего невязку системы: траектории невязки могут его покидать. Целью работы является построение т.н. *нехрупкой пары*: матрицы фильтра и соответствующего – по возможности, малого – эллипсоида, содержащего невязку системы при всех допустимых возмущениях матрицы фильтра.

## 2. Задача фильтрации: постановка и решение

Напомним постановку и решение задачи фильтрации при ограниченных внешних возмущениях. Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \\ z &= C_1 x, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , оцениваемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  и внешним возмущением (шумом)  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению<sup>3</sup>

$$\|w(t)\| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

---

<sup>3</sup> Здесь и далее  $\|\cdot\|$  – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы,  $\mathbb{S}^n$  – пространство симметричных матриц  $n$ -го порядка,  $I$  – единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Хотя природа возмущений в состоянии и выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы  $D_1$  и  $D_2$  «вырезают» из вектора  $w$  разные «куски». Пара  $(A, C)$  предполагается наблюдаемой.

Пусть состояние  $x$  системы недоступно измерению и информация о системе представляется ее выходом  $y$ . Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}$ , включающим в себя рассогласование выхода  $y$  и его прогноза  $C\hat{x}$ :

$$(2) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}), \quad L \in \mathbb{R}^{n \times l}.$$

Структура фильтра (2) такая же, как в известном наблюдателе Люенберге-ра [14, 15]: он является линейным стационарным, и подлжит выбору лишь постоянная матрица  $L$ , которую будем называть *матрицей фильтра*.

Введем в рассмотрение *невязку*  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ ; согласно (1), (2) она будет удовлетворять дифференциальному уравнению<sup>4</sup>

$$(3) \quad \dot{e} = (A - LC)e + (D_1 - LD_2)w.$$

Тогда точность фильтрации, состоящей в оценивании выхода  $z$ , будет характеризовать величина

$$e_1 = z - \hat{z} = C_1(x - \hat{x}) = C_1e.$$

Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) единого эллипсоида, содержащего невязку  $e_1$ .

Удобным техническим средством для решения этой задачи оказался аппарат линейных матричных неравенств и идеология инвариантных эллипсоидов [5, 6]. Напомним, что эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1 \right\}, \quad P \succ 0$$

называется *инвариантным* для динамической системы  $\dot{x} = Ax + Dw$ , если из условия  $x(0) \in \mathcal{E}$  следует  $x(t) \in \mathcal{E}$  для всех моментов времени  $t \geq 0$ . При этом, если  $\mathcal{E}$  – инвариантный эллипсоид с матрицей  $P$ , то линейный выход  $z(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r$  динамической системы при  $x(0) \in \mathcal{E}$  будет принадлежать эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^r : z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1 \right\},$$

который называется *ограничивающим*, а при  $x(0) \notin \mathcal{E}$  будет стремиться к нему.

---

<sup>4</sup> Заметим, что матрица фильтра  $L$  стабилизирует систему (3). Существование матрицы  $L$  такой, чтобы матрица  $A - LC$  была устойчивой (гурвицевой), вытекает из свойства наблюдаемости исходной системы (1).

Таким образом, идеология инвариантных/ограничивающих эллипсоидов позволяет при малых отклонениях оценить равномерную по  $t$  точность фильтрации, а при больших отклонениях – асимптотическую. В рамках этого подхода при фиксированном  $L$  найдем минимальный ограничивающий эллипсоид, а затем минимизируем его по  $L$ . В качестве критерия минимальности ограничивающего эллипсоида обычно принимается *критерий следа*  $f(P) = \text{tr } CPC^T$ , соответствующий сумме квадратов его полуосей.

В работе [4] был установлен следующий результат.

*Теорема 1.* Пусть  $Q_*$ ,  $Y_*$  – решение задачи

$$\min \text{tr } H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^T Q + QA - YC - C^T Y^T + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ D_1^T Q - D_2^T Y^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \\ \begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $Q \in \mathbb{S}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H \in \mathbb{S}^r$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$L_* = Q_*^{-1} Y_*,$$

а минимальный ограничивающий эллипсоид, содержащий ошибку оценки выхода  $z$  системы (1) при  $x_0 = 0$ , определяется матрицей

$$C_1 Q_*^{-1} C_1^T.$$

Обратим внимание, что при фиксированном  $\alpha$  данная задача сводится к несложно решаемой задаче полуопределенного программирования.

*Замечание 1.* Если известно начальное состояние  $x(0) = x_0$  системы (1), то к ограничениям оптимизационной задачи в теореме 1 добавляется

$$x_0^T Q x_0 \leq 1,$$

означающее, что  $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) = x_0 \in \mathcal{E}$ .

Если же начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду начальных состояний

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P_0^{-1} x \leq 1 \right\}, \quad P_0 \succ 0,$$

то в качестве дополнительного ограничения добавляется линейное матричное неравенство

$$Q \preceq P_0^{-1},$$

означающее, что  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ . В этом случае вновь имеем  $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) = x(0) \in \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ .

Таким образом, в обоих случаях гарантируется равномерная оценка точности фильтрации.

### 3. Инвариантность и нехрупкость

Будем говорить, что матрица фильтра  $L$  и положительно определенная матрица  $P = Q^{-1}$  образуют *нехрупкую пару* с уровнем нехрупкости  $\gamma$ , если для всякого  $\Delta: \|\Delta\| \leq \gamma$ , возмущенная матрица фильтра  $L + \Delta$  стабилизирует систему (3) и матрица  $P$  определяет ее инвариантный эллипсоид. При этом будем называть *нехрупкими* как сам фильтр, так и соответствующий ограничивающий эллипсоид, содержащий ошибку оценки выхода системы. Как и ранее, будем стремиться сделать его по возможности малым.

Сформулируем основной результат статьи.

*Теорема 2.* Пусть  $\tilde{Q}, \tilde{Y}$  доставляют решение задаче

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^T Q + QA - YC - C^T Y^T + \alpha Q + \varepsilon C^T C & QD_1 - YD_2 + \varepsilon C^T D_2 & \gamma Q \\ D_1^T Q - D_2^T Y^T + \varepsilon D_2^T C & -\alpha I + \varepsilon D_2^T D_2 & 0 \\ \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \\ \begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^T & Q \end{pmatrix} \succ 0, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация ведется по матричным переменным  $Q \in \mathbb{S}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H \in \mathbb{S}^r$ , скалярной переменной  $\varepsilon$  и скалярному параметру  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица

$$C_1 \tilde{Q}^{-1} C_1^T$$

определяет нехрупкий ограничивающий эллипсоид для ошибки оценки выхода  $z$  системы (1) при  $x_0 = 0$ , соответствующий нехрупкой паре

$$\tilde{L} = \tilde{Q}^{-1} \tilde{Y}, \quad \tilde{P} = \tilde{Q}^{-1},$$

с уровнем нехрупкости  $\gamma$ .

Доказательство этого и последующих утверждений приведено в Приложении.

Как и ранее, задача, сформулированная в теореме 2, представляет собой параметрическую задачу полуопределенного программирования, легко решаемую численно.

Используемый подход, основанный на построении общей квадратичной функции Ляпунова для неопределенной системы, дает лишь достаточные условия робастной асимптотической устойчивости. Не будем останавливаться подробно на анализе степени консерватизма получаемой эллипсоидальной оценки, однако примеры свидетельствуют о том, что консерватизм не очень велик.

*Замечание 2.* Обратим внимание, что нехрупкая матрица фильтра  $L$  робастно стабилизирует систему

$$\dot{e} = (A - (L + \Delta)C)e + (D_1 - (L + \Delta)D_2)w$$

при всех допустимых неопределенностях  $\Delta: \|\Delta\| \leq \gamma$ . При такой специальной структуре матрицы замкнутой системы робастная стабилизация возможна при любом  $\gamma$  (см., например, [6, замечание 5.2.1]). Иными словами, уровень нехрупкости  $\gamma$  может быть задан произвольно большим, что приведет лишь к увеличению размера нехрупкого инвариантного эллипсоида.

#### 4. Дискретный случай

Рассмотрим линейную систему в дискретном времени

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \\ z_k &= C_1 x_k, \end{aligned}$$

с начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ , с состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$ , оцениваемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$\|w_k\| \leq 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Пара  $(A, C)$  предполагается наблюдаемой.

Как и в непрерывном случае построим фильтр, описываемый линейным разностным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}_k$ , включающим в себя рассогласование выхода  $y$  и его прогноза  $C\hat{x}_k$

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k), \quad L \in \mathbb{R}^{n \times l},$$

в котором подлежит выбору постоянная матрица фильтра  $L$ .

Решение задачи нахождения минимального ограничивающего эллипсоида (определение которого остается по существу таким же, как и в непрерывном случае), содержащего ошибку оценки

$$e_{1,k} = z_k - \hat{z}_k = C_1 e_k,$$

где  $e_k = x_k - \hat{x}_k$  – невязка системы, устанавливается следующей теоремой. Она является дискретным аналогом теоремы 1.



Теорема 3 [4, 6]. Пусть  $Q_*$ ,  $Y_*$  – решение задачи

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & (QA - YC)^T & 0 \\ QA - YC & -Q & QD_1 - YD_2 \\ 0 & (QD_1 - YD_2)^T & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $Q \in \mathbb{S}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H \in \mathbb{S}^r$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$L_* = Q_*^{-1} Y_*,$$

а минимальный ограничивающий эллипсоид, содержащий ошибку оценки выхода  $z$  системы (4) при  $x_0 = 0$ , определяется матрицей

$$C_1 Q_*^{-1} C_1^T.$$

Определение нехрупкой пары остается таким же, как и в непрерывном случае; ее нахождение производится в соответствии со следующим результатом.

Теорема 4. Пусть  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{Y}$  доставляют решение задаче

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q + \varepsilon C^T C & (QA - YC)^T & \varepsilon C^T D_2 & 0 \\ QA - YC & -Q & QD_1 - YD_2 & \gamma Q \\ \varepsilon D_2^T C & (QD_1 - YD_2)^T & -(1 - \alpha)I + \varepsilon D_2^T D_2 & 0 \\ 0 & \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \\ \begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация ведется по матричным переменным  $Q \in \mathbb{S}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H \in \mathbb{S}^r$ , скалярной переменной  $\varepsilon$  и скалярному параметру  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда матрица

$$C_1 \tilde{Q}^{-1} C_1^T$$

определяет нехрупкий ограничивающий эллипсоид для ошибки оценки выхода  $z_k$  системы (4) при  $x_0 = 0$ , соответствующий нехрупкой паре

$$\tilde{L} = \tilde{Q}^{-1} \tilde{Y}, \quad \tilde{P} = \tilde{Q}^{-1},$$

с уровнем нехрупкости  $\gamma$ .

Как и в непрерывном случае, оптимизационная задача из теоремы 4 представляет собой несложную параметрическую задачу полуопределенного программирования.

Обратим внимание, что замечание 2 сохраняет свою силу и в дискретном случае. А именно, робастная стабилизация системы

$$e_{k+1} = (A - (L + \Delta)C)e_k + (D_1 - (L + \Delta)D_2)w_k$$

при всех допустимых неопределенностях  $\Delta: \|\Delta\| \leq \gamma$  возможна при любом значении уровня нехрупкости  $\gamma$ .

## 5. Пример

Продемонстрируем предложенный подход к фильтрации ограниченных внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи оценивания состояния двойного пружинного маятника (см. рис. 1).

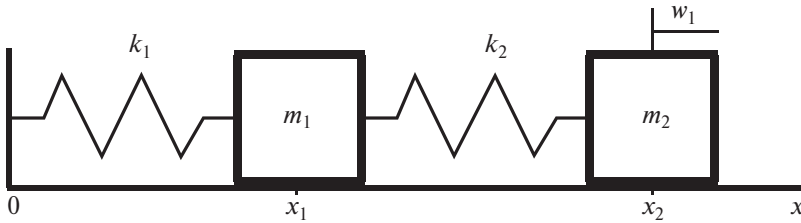


Рис. 1. Двойной пружинный маятник.

Пусть  $x_1, x_2$  – координаты левого и правого тела, а  $v_1, v_2$  – их скорости, причем на правое тело воздействует внешнее возмущение  $w_1$ . Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w_1, \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты жесткости левой и правой пружины,  $m_1, m_2$  – массы левого и правого тела,

Взяв в качестве вектора состояния

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

в качестве наблюдаемого выхода – зашумленный вектор координат

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

а в качестве оцениваемого – вектор скоростей

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

приходим к системе вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \|w\| \leq 1.$$

Пусть далее параметры системы единичны:  $k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1$ , пусть также  $P_0 = 0,15I$ .

Сначала в соответствии с теоремой 1 найдем решение задачи без учета требования нехрупкости. Получаем матрицу фильтра

$$L_* = \begin{pmatrix} 1,4808 & 0,2309 \\ -0,1641 & 2,1590 \\ -0,5457 & 1,0867 \\ 0,6232 & 3,4354 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$Q_* = \begin{pmatrix} 5,0166 & -0,1455 & -2,0847 & -0,0184 \\ -0,1455 & 6,1854 & -0,1544 & -1,5832 \\ -2,0847 & -0,1544 & 4,0310 & 0,0762 \\ -0,0184 & -1,5832 & 0,0762 & 1,3265 \end{pmatrix},$$

которым соответствует минимальный ограничивающий эллипс  $\mathcal{E}_*$  с матрицей

$$C_1 Q_*^{-1} C_1^T = \begin{pmatrix} 0,3167 & -0,0046 \\ -0,0046 & 1,0863 \end{pmatrix},$$

содержащий ошибку  $e_1$  оценки выхода  $z$ .

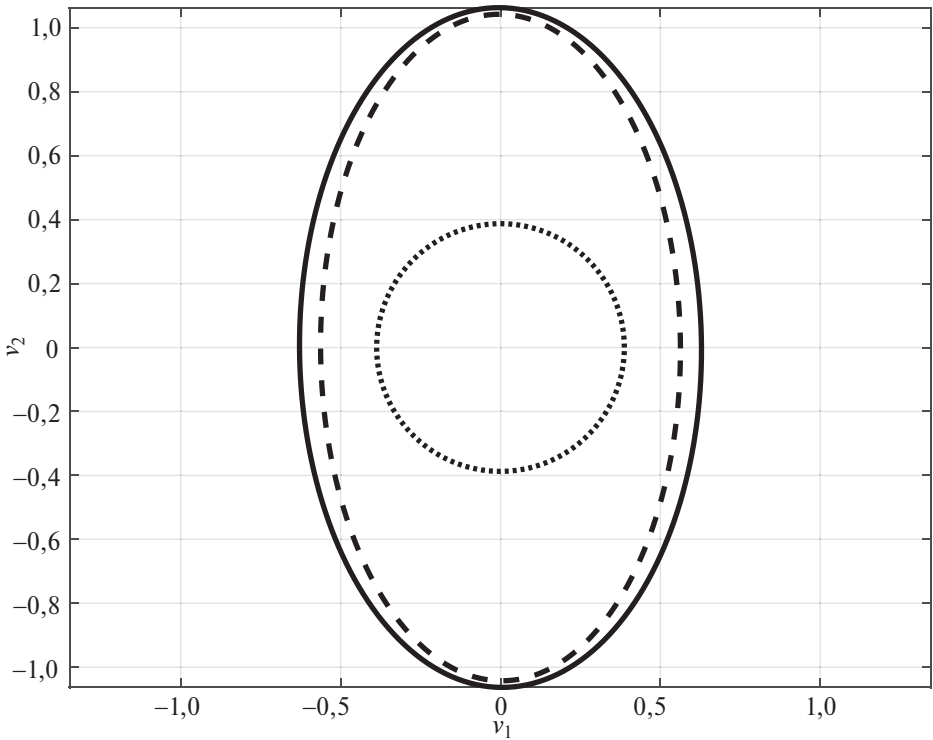


Рис. 2. Ограничивающие эллипсы.

Теперь зададимся уровнем нехрупкости

$$\gamma = 2.$$

Решив оптимизационную задачу из теоремы 2, находим матрицу фильтра

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 23,3910 & 0,9878 \\ 0,9883 & 21,9974 \\ 14,5498 & 1,0207 \\ 0,9240 & 26,6793 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 5,3807 & -0,1112 & -2,0697 & -0,0284 \\ -0,1112 & 6,2215 & -0,1462 & -1,5363 \\ -2,0697 & -0,1462 & 3,3329 & 0,0697 \\ -0,0284 & -1,5363 & 0,0697 & 1,2650 \end{pmatrix}.$$

В результате получена нехрупкая пара  $(\tilde{L}, \tilde{P})$ , где

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,2446 & 0,0103 & 0,1522 & 0,0097 \\ 0,0103 & 0,2301 & 0,0107 & 0,2790 \\ 0,1522 & 0,0107 & 0,3951 & -0,0054 \\ 0,0097 & 0,2790 & -0,0054 & 1,1299 \end{pmatrix},$$

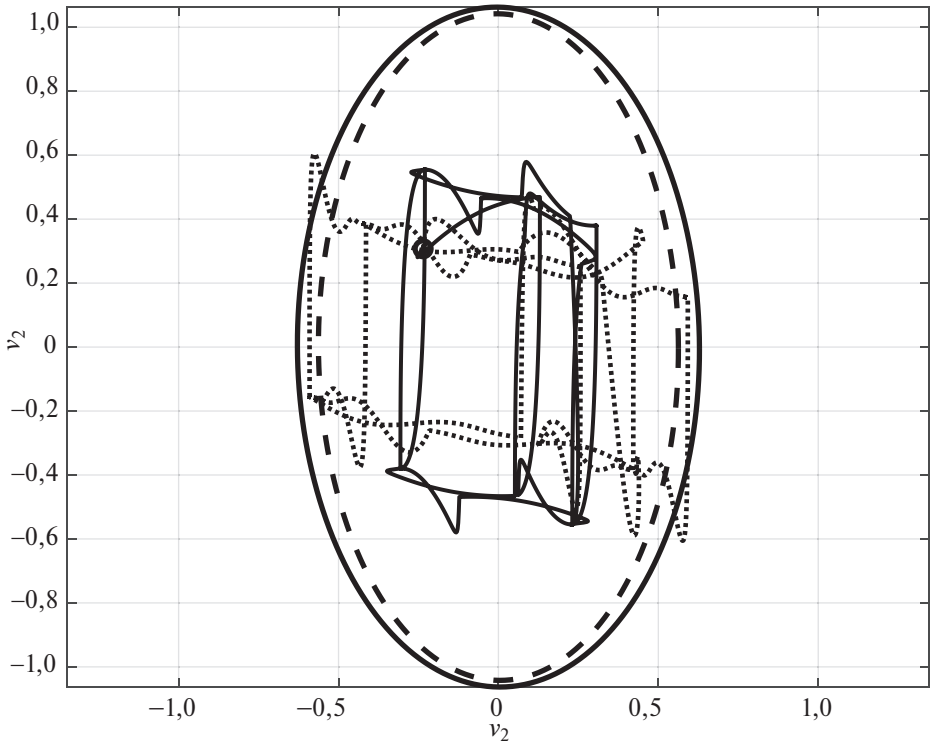


Рис. 3. Траектории невязок.

которой соответствует нехрупкий ограничивающий эллипс  $\tilde{\mathcal{E}}$  с матрицей

$$C_1 \tilde{Q}^{-1} C_1^T = \begin{pmatrix} 0,3951 & -0,0054 \\ -0,0054 & 1,1299 \end{pmatrix},$$

содержащий ошибку  $e_1$  оценки выхода  $z$ . Обратим внимание, что размеры (по критерию следа) эллипсов  $\tilde{\mathcal{E}}$  и  $\mathcal{E}_*$  отличаются менее, чем на 9%.

На рис. 2 сплошной линией изображен нехрупкий ограничивающий эллипс  $\tilde{\mathcal{E}}$ , а пунктиром – минимальный ограничивающий эллипс  $\mathcal{E}_*$ . Точечной линией показана проекция эллипсоида начальных состояний на плоскость  $(v_1, v_2)$ , представляющая собой эллипс с матрицей  $C_1 P_0 C_1^T$  (см. замечание 1).

Теперь подвергнем оптимальную матрицу фильтра  $L_*$  возмущению

$$\Delta = \begin{pmatrix} -0,0171 & 0,1641 \\ -0,0714 & -0,4232 \\ -0,9640 & -0,1353 \\ 0,2461 & -0,7643 \end{pmatrix}, \quad \|\Delta\| = 1.$$

На рис. 3 точечной линией показана траектория невязки  $e_1$  при некотором начальном условии  $x_0 \in \mathcal{E}_0$  (его проекция на плоскость  $(v_1, v_2)$  показана кружком), некотором допустимом внешнем возмущении  $w$  и матрице филь-

тра  $L_* + \Delta$ . Как видно, траектория покидает не только минимальный ограничивающий эллипс  $\mathcal{E}_*$ , но и нехрупкий ограничивающий эллипс  $\tilde{\mathcal{E}}$  – при том, что размах неопределенности в матрице фильтра вдвое меньше уровня нехрупкости  $\gamma = 2$ .

Для сравнения подвергнем возмущению вдвое большего размаха ( $\|2\Delta\| = 2 = \gamma$ ) нехрупкую матрицу фильтра  $\tilde{L}$ . Траектория невязки  $e_1$  системы при том же начальном условии и внешнем возмущении показана на рис. 3 сплошной линией; как видно, ее поведение по отношению к ограничивающему эллипсу принципиально иное.

Вычисления проводились в среде МАТЛАВ с использованием пакета `svx` [17].

## 6. Заключение

Предложен простой и универсальный подход к решению задачи нехрупкой фильтрации произвольных ограниченных внешних возмущений с использованием наблюдателя. Подход основан на методе инвариантных эллипсоидов; применение этой концепции позволило переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести ее к параметрической задаче полуопределенного программирования, легко решаемой численно. Эффективность метода продемонстрирована на примере двойного пружинного маятника.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 2.* Невязка  $e$  системы (1) для возмущенной матрицы фильтра  $L + \Delta$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(II.1) \quad \dot{e} = (A - (L + \Delta)C)e + (D_1 - (L + \Delta)D_2)w.$$

Согласно [6], условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P = Q^{-1} \succ 0$  для динамической системы (II.1) эквивалентно существованию  $\alpha(\Delta) > 0$  такого, что ЛМН

$$(II.2) \quad \begin{pmatrix} (A - (L + \Delta)C)^T Q + Q(A - (L + \Delta)C) + \alpha(\Delta)Q & Q(D_1 - (L + \Delta)D_2) \\ (D_1 - (L + \Delta)D_2)^T Q & -\alpha(\Delta)I \end{pmatrix} \preceq 0$$

выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta$ :  $\|\Delta\| \leq \gamma$ .

Будем предполагать, что существует такое  $\alpha > 0$ , что неравенство (II.2) выполняется при всех допустимых  $\Delta$ ; тогда (II.2) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} (A - LC)^T Q + Q(A - LC) + \alpha Q & Q(D_1 - LD_2) \\ (D_1 - LD_2)^T Q & -\alpha I \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} -C & -D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C^T \\ -D_2^T \end{pmatrix} \Delta^T \begin{pmatrix} Q & 0 \end{pmatrix} \preceq 0.$$

По лемме Питерсена [16] (см. также [6, следствие 2.2.6]) это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$\begin{pmatrix} (A - LC)^T Q + Q(A - LC) + \alpha Q & Q(D_1 - LD_2) \\ (D_1 - LD_2)^T Q & -\alpha I \end{pmatrix} + \\ + \varepsilon \begin{pmatrix} -C^T \\ -D_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & -D_2 \end{pmatrix} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} (A - LC)^T Q + Q(A - LC) + \alpha Q + \varepsilon C^T C & Q(D_1 - LD_2) + \varepsilon C^T D_2 & \gamma Q \\ (D_1 - LD_2)^T Q + \varepsilon D_2^T C & -\alpha I + \varepsilon D_2^T D_2 & 0 \\ \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вводя новую матричную переменную  $Y = QL$ , преобразуем последнее соотношение к линейному виду

$$(П.3) \quad \begin{pmatrix} A^T Q + QA - YC - C^T Y^T + \alpha Q + \varepsilon C^T C & QD_1 - YD_2 + \varepsilon C^T D_2 & \gamma Q \\ D_1^T Q - D_2^T Y^T + \varepsilon D_2^T C & -\alpha I + \varepsilon D_2^T D_2 & 0 \\ \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Поскольку  $e_1 = C_1 e$ , то невязка  $e_1$  содержится в ограничивающем эллипсоиде с матрицей  $C_1 Q^{-1} C_1^T$ . Таким образом, приходим к задаче

$$\min \operatorname{tr} C_1 Q^{-1} C_1^T \quad \text{при ограничениях (П.3) и } Q \succ 0.$$

Согласно [6], эта задача эквивалентна задаче минимизации  $\operatorname{tr} H$  при ограничениях (П.3) и

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^T & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где  $H \in S^r$  – вспомогательная матричная переменная. Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 4.* Невязка системы (4) для возмущенной матрицы фильтра  $L + \Delta$  будет удовлетворять разностному уравнению

$$(П.4) \quad e_{k+1} = (A - (L + \Delta)C)e_k + (D_1 - (L + \Delta)D_2)w_k.$$

Согласно [6], условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P = Q^{-1} \succ 0$  для динамической системы (П.4) эквивалентно существованию  $\alpha(\Delta) > 0$  такого, что ЛМН

$$(П.5) \quad \begin{pmatrix} -\alpha(\Delta)Q & (A - (L + \Delta)C)^T Q & 0 \\ Q(A - (L + \Delta)C) & -Q & Q(D_1 - (L + \Delta)D_2) \\ 0 & (D_1 - (L + \Delta)D_2)^T Q & -(1 - \alpha(\Delta))I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta$ :  $\|\Delta\| \leq \gamma$ .

Будем предполагать, что существует такое  $\alpha > 0$ , что неравенство (П.5) выполняется при всех допустимых  $\Delta$ ; тогда перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\alpha Q & (A - LC)^T Q & 0 \\ Q(A - LC) & -Q & Q(D_1 - LD_2) \\ 0 & (D_1 - LD_2)^T Q & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \Delta (-C \ 0 \ -D_2) + \begin{pmatrix} -C^T \\ 0 \\ -D_2^T \end{pmatrix} \Delta^T (0 \ Q \ 0) \preceq 0. \end{aligned}$$

Вновь воспользовавшись леммой Питерсена заключаем, что это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\alpha Q & (A - LC)^T Q & 0 \\ Q(A - LC) & -Q & Q(D_1 - LD_2) \\ 0 & (D_1 - LD_2)^T Q & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} + \\ & + \varepsilon \begin{pmatrix} -C^T \\ 0 \\ -D_2^T \end{pmatrix} (-C \ 0 \ -D_2) + \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ Q \ 0) \preceq 0 \end{aligned}$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q + \varepsilon C^T C & (A - LC)^T Q & \varepsilon C^T D_2 & 0 \\ Q(A - LC) & -Q & Q(D_1 - LD_2) & \gamma Q \\ \varepsilon D_2^T C & (D_1 - LD_2)^T Q & -(1 - \alpha)I + \varepsilon D_2^T D_2 & 0 \\ 0 & \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Вводя новую матричную переменную  $Y = QL$ , преобразуем последнее соотношение к линейному виду

$$(П.6) \quad \begin{pmatrix} -\alpha Q + \varepsilon C^T C & (QA - YC)^T & \varepsilon C^T D_2 & 0 \\ QA - YC & -Q & QD_1 - YD_2 & \gamma Q \\ \varepsilon D_2^T C & (QD_1 - YD_2)^T & -(1 - \alpha)I + \varepsilon D_2^T D_2 & 0 \\ 0 & \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Аналогично непрерывному случаю, приходим к задаче

$$\min \operatorname{tr} C_1 Q^{-1} C_1^T \quad \text{при ограничениях (П.6) и } Q \succ 0,$$

эквивалентной задаче минимизации  $\operatorname{tr} H$  при ограничениях (П.6) и

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где  $H \in S^r$  – вспомогательная матричная переменная. Теорема 4 доказана.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schwerpe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
4. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.  
*Polyak B.T., Topunov M.V.* Filtering under Nonrandom Disturbances: The Method of Invariant Ellipsoids // Doklady Mathematics. 2008. V. 77. No. 1. P. 158–162.
5. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
7. *Хлебников М.В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2009. № 1. С. 147–161.  
*Khlebnikov M.V.* Robust Filtering under Nonrandom Disturbances: The Invariant Ellipsoid Approach // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 133–146.
8. *Хлебников М.В.* Разреженная фильтрация при ограниченных внешних возмущениях // АиТ. 2022. № 2. С. 35–50.  
*Khlebnikov M.V.* Sparse Filtering under Bounded Exogenous Disturbances // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 2. P. 191–203.
9. *Хлебников М.В.* Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // АиТ. 2023. № 4. С. 64–95.  
*Khlebnikov M.V.* A Comparison of Guaranteeing and Kalman Filters // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 4. P. 434–459.
10. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, Fragile, or Optimal? // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 8. P. 1098–1105.
11. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез грубых регуляторов на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2006. № 12. С. 154–162.  
*Balandin D.V., Kogan M.M.* Synthesis of nonfragile controllers on the basis of linear matrix inequalities // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 12. P. 2002–2009.
12. *Хлебников М.В.* Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // АиТ. 2010. № 4. С. 106–119.  
*Khlebnikov M.V.* A Nonfragile Controller for Suppressing Exogenous Disturbances // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 4. P. 640–653.
13. *Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Инвариантность и нехрупкость при подавлении внешних возмущений // АиТ. 2015. № 5. С. 175–190.  
*Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Invariance and Nonfragility in the Rejection of Exogenous Disturbances // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 5. P. 872–884.
14. *Luenberger D.G.* Observing the State of a Linear System // IEEE Transactions on Military Electronics. 1964. V. 8. P. 74–80.

15. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 35. P. 596–602.
16. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. Iss. 4. P. 351–357.
17. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.2. URL <http://cvxr.com/cvx>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук (vnchest@yandex.ru),  
Д.В. ШАТОВ, канд. техн. наук (dvshatov@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ<sup>1</sup>

Рассматриваются линейные многомерные системы, у которых физические параметры могут менять свои значения (от известных номинальных) произвольным и нестационарным образом. Объект управления подвержен действию полигармонических внешних возмущений, содержащих произвольное число неизвестных частот с неизвестными амплитудами (их сумма ограничена). Формулируется задача синтеза регулятора, который гарантирует робастную устойчивость замкнутой системы и обеспечивает желаемые ошибки по регулируемым переменным для объекта с номинальными параметрами в установившемся режиме. Решение задачи основано на представлении уравнений системы в  $(W, \Lambda, K)$ -форме, для которой формулируется и решается стандартная  $H_\infty$ -задача оптимизации. Желаемая точность системы обеспечивается с помощью аналитического выбора весовой матрицы при регулируемых переменных. Предложенный метод синтеза иллюстрируется на примере решения известной тестовой задачи.

*Ключевые слова:* линейные многомерные системы, робастное управление, синтез регулятора,  $H_\infty$ -оптимизация, ограниченные внешние возмущения, нестационарные параметры.

DOI: 10.31857/S0005231024060029, EDN: XXRFXXO

### 1. Введение

Проблеме анализа робастной устойчивости и робастной стабилизации с середины 80-х гг. XX в. уделяется пристальное внимание исследователей, что подтверждается многочисленными ссылками на работы этого периода, указанными в библиографиях [1–4]. Сами монографии содержат подробное изложение известных методов и подходов к решению указанных задач. Вместе с тем необходимо подчеркнуть следующие фундаментальные черты популярных методов анализа и синтеза современной теории управления:

– известные техники  $H_2$ -,  $H_\infty$ -,  $l_1$ -,  $\mu$ -синтез и модальное управление (размещение полюсов) могут приводить к системам с очень низкой робастностью: запасы устойчивости по фазе и модулю недопустимо малы (на физическом входе/выходе объекта);

---

<sup>1</sup> Результаты исследований, представленные в разделах 2 и 3, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 23-29-00588), <https://rscf.ru/project/23-29-00588/>.

– порядок регулятора может сильно превышать порядок физического объекта;

– зачастую строятся только регуляторы по состоянию, а не по измеряемому физическому выходу объекта;

– уравнения состояния (и передаточная матрица) – вторичные формы описания, их коэффициенты зачастую не имеют физического смысла.

Естественно рассматривать уравнения в физических переменных (на основе законов механики и электродинамики), так как они имеют коэффициенты с ясным физическим содержанием (масса, момент инерции, емкость, индуктивность, сопротивление и т.д.). Переход от исходных уравнений в физических переменных к уравнениям состояния или передаточным матрицам ведет к перемешиванию и размножению варьируемых параметров. Это сильно повышает консерватизм результатов анализа и синтеза.

В настоящей работе рассматриваются уравнения объекта в физических переменных. Предлагаемый подход опирается на введенные ранее  $(W, \Lambda)$ - и  $(W, \Lambda, K)$ -формы уравнений [5–8]. На базе техники кругового критерия абсолютной устойчивости, развитой в [9], и понятия радиуса запасов устойчивости [10] показывается, что результаты указанных работ на самом деле справедливы и при нестационарных отклонениях физических параметров объекта от номинальных в тех же диапазонах. Это весьма важно как с теоретической, так и с практической точек зрения.

На практике реальные динамические системы подвержены действию неизмеряемых внешних возмущений, которые в математической теории автоматического управления ограничиваются в какой-либо норме [11]. Поэтому возникает задача обеспечения заданных (не более допустимых) отклонений регулируемых переменных объекта от нуля. Проблеме подавления внешних возмущений посвящено много исследований, например [11, 12]. В настоящей работе в качестве неизмеряемых внешних возмущений рассматриваются полигармонические функции с неизвестным (бесконечным) числом частот и с неизвестными амплитудами гармоник, сумма которых ограничена заданным числом, как в [10]. В частном случае кратных частот данные возмущения покрывают фактически весь класс физически возможных возмущений в инженерной практике: они непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные по времени, что позволяет их представить абсолютно сходящимися рядами Фурье [10].

Таким образом, в настоящей работе рассматривается задача синтеза регулятора по выходу, который, с одной стороны, обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы при нестационарных отклонениях физических параметров объекта от номинальных, а с другой стороны, гарантирует заданные отклонения регулируемых переменных от нуля при действии внешних возмущений указанного выше класса. В определенном смысле такая задача может рассматриваться как задача синтеза LPV-систем (Linear Parameter-Varying systems) [13–16], однако вопросы заданной точности в работах это-

го направления не рассматриваются, а доказательство устойчивости целиком опирается на второй метод А.М. Ляпунова, что менее эффективно по сравнению с частотными критериями, используемыми здесь авторами, в силу известных трудностей подбора нужной функции Ляпунова. Помимо этого, структура  $(W, \Lambda, K)$ -формы непосредственно позволяет работать с теми контурами, в которых и находятся варьируемые параметры. Это позволяет задачу о робастной стабилизации, сводящейся к построению регулятора, обеспечивающего требуемый радиус запасов устойчивости в контурах, где находятся варьируемые физические параметры, решать с точностью до необходимых и достаточных условий по отношению к радиусу запасов устойчивости. Это главное преимущество данного подхода к синтезу робастного регулятора по сравнению со всеми известными в литературе методами.

Решение такой задачи сводится к стандартной задаче  $H_\infty$ -оптимизации, а заданная точность достигается путем специального выбора диагональной весовой матрицы при регулируемых переменных объекта, для выбора элементов которой даны аналитические формулы аналогично [10]. При этом порядок регулятора не превышает порядка исходного физического объекта управления.

Программно данный подход реализован в среде MATLAB на основе пакета Robust Control Toolbox [17] и использует технику линейных матричных неравенств (LMI), см. [18]. Приводится пример синтеза регулятора для широко известной тестовой задачи [5–8, 19–22]. Работа является расширенным изложением докладов [9, 20].

## 2. Предварительные сведения

### 2.1. Описание объекта и регулятора

Рассмотрим объект управления в физических переменных, описываемый следующими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{aligned} L_1(p)\tilde{z}(t) &= L_2(p)u(t) + L_3(p)f(t), \\ y &= N\tilde{z}(t), \end{aligned}$$

где  $\tilde{z}(t) \in R^l$  – вектор физических переменных объекта управления (он содержит координаты, скорости, ускорения, токи, напряжения и т.д.);  $u(t) \in R^m$  – вектор управляющих воздействий;  $y \in R^{m_2}$  – вектор измеряемых и одновременно регулируемых переменных;  $f(t) \in R^{m_3}$  – вектор неизвестных внешних возмущений, описанный ниже. Матрица  $N$  – известная вещественная матрица размером  $[m_2 \times l]$ ,  $L_1(p)$ ,  $L_2(p)$  и  $L_3(p)$  – полиномиальные матрицы размером  $[l \times l]$ ,  $[l \times m]$  и  $[l \times m_3]$ :

$$L_1(p) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} L_1^{(i)} p^i, \quad L_2(p) = \sum_{j=0}^{\alpha_2} L_2^{(j)} p^j, \quad L_3(p) = \sum_{k=0}^{\alpha_3} L_3^{(k)} p^k,$$

где  $L_1^{(i)}$ ,  $L_2^{(j)}$ ,  $L_3^{(k)}$  – известные вещественные матрицы соответствующих размеров,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  – известные числа ( $\alpha_2$ ,  $\alpha_3 < \alpha_1$ ),  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования. Объект (1) предполагается стабилизируемым и детектируемым.

Предполагается, что каждая компонента вектора возмущений  $f_i(t)$ ,  $i = \overline{1, m_3}$  является ограниченной полигармонической функцией следующего вида:

$$(2) \quad f_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \sin(\omega_k t + \phi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3},$$

где  $f_{ik} > 0$ ,  $\phi_{ik}$ ,  $\omega_k$ ,  $i = \overline{1, m_3}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$  – неизвестные амплитуды, фазы и частоты возмущения соответственно. Также предполагается, что сумма амплитуд  $f_{ik}$  каждой компоненты ограничена:

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \leq f_i^*, \quad i = \overline{1, m_3},$$

где  $f_i^*$  – заданные числа.

В отличие от [6, 7], где внешнее возмущение предполагалось ограниченным в средне-квадратичном смысле, в настоящей работе возмущения могут иметь неограниченное число гармоник при ограничении на их абсолютные значения.

Предполагается, что существует стабилизирующий (при номинальных параметрах) регулятор для объекта (1):

$$(4) \quad u(t) = K(p)y(t),$$

где  $K(p)$  – передаточная матрица регулятора, содержащая правильные передаточные функции.

## 2.2. Задача робастного анализа

Предположим, что у объекта (1) в матрицах  $L_1^{(i)}$ ,  $i = \overline{0, \alpha_1}$ ,  $L_2^{(j)}$ ,  $j = \overline{0, \alpha_2}$  имеется  $n$  элементов, которые меняют свои значения от известных номинальных величин  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$ . Варьирование параметров можно описать функциями времени:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i^0 + \Delta\lambda_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\Delta\lambda_i(t)$  – отклонение  $i$ -го элемента матрицы объекта от номинального значения, такое что выполняется  $\lambda_i(t) \in [\lambda_i^{\min}, \lambda_i^{\max}]$ , причем границы интервалов  $\lambda_i^{\min}$ ,  $\lambda_i^{\max}$  неизвестны.

Система (1), (4) асимптотически устойчива при номинальных значениях  $\lambda_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$  варьируемых параметров  $\lambda_i(t)$ .

*Задача 1. Требуется найти допустимые значения  $\lambda_i^{\min}$ ,  $\lambda_i^{\max}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при которых система (1), (4) асимптотически устойчива.*

Каноническая  $(W, \Lambda, K)$ -форма – специальная форма представления уравнений системы (1), (4), см. [5, 8, 9]:

$$(5) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}\tilde{u} + W_{12}u, & \tilde{u} &= \Lambda\tilde{y}, \\ y &= W_{21}\tilde{u} + W_{22}u, & u &= Ky, \end{aligned}$$

где  $W_{ij}(p)$ ,  $i, j = 1, 2$  – передаточные матрицы, которые не содержат варьируемых параметров  $\lambda_i(t)$ , сигналы  $\tilde{u}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$  – функции из  $R^n$ , которые называются «фиктивными» входами и выходами, как и соответствующий им контур управления,  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  – диагональная матрица, содержащая только варьируемые параметры, векторы управления  $u(t)$  и выхода  $y(t)$  уже были описаны выше.

В [6] показано, что замкнутая система (1), (4) всегда может быть приведена к эквивалентной  $(W, \Lambda, K)$ -форме.

Система (5), разомкнутая по входам  $\tilde{u}$ , имеет следующую передаточную матрицу:

$$(6) \quad W(p) = -\Lambda[W_{11} + W_{12}K(I - W_{22}K)^{-1}W_{21}] = -\Lambda\tilde{W}(p),$$

где  $I$  – единичная матрица размером  $(m_2 \times m_2)$ .

Важной особенностью передаточной матрицы (6) является то, что варьируемые параметры содержатся только в диагональной матрице коэффициентов усиления  $\Lambda$ , поэтому можно воспользоваться круговым критерием, чтобы исследовать робастные свойства замкнутой системы.

Согласно круговому критерию, рассматривается нелинейная система управления вида [23]:

$$(7) \quad \sigma(t) = -W(p)\xi(t), \quad \xi(t) = \varphi[\sigma(t), t],$$

где  $W(p)$  – линейная часть системы, в рассматриваемом случае она представляет собой  $[n \times n]$  передаточную матрицу (6),  $\varphi(\sigma, t) = [\varphi_1(\sigma_1, t), \dots, \varphi_n(\sigma_n, t)]^T$  – вектор нелинейных элементов (в общем случае нестационарных), чьи характеристики удовлетворяют неравенствам:

$$(8) \quad \alpha_i \leq \frac{\varphi_i(\sigma_i, t)}{\sigma_i} \leq \beta_i, \quad \varphi_i(0, t) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\alpha_i < 1$ ,  $\beta_i > 1$  определяют границы секторной нелинейности, которая ограничивает характеристику  $i$ -й нелинейности. Система (7) с  $\xi(t) = \sigma(t)$  (т.е. в отсутствие нелинейности) асимптотически устойчива по способу построения регулятора для случая  $\lambda_i = \lambda_i^0$ .

С учетом введенных обозначений формулируется модификация кругового критерия [9]:

*Теорема 1. Пусть передаточная матрица линейной части системы удовлетворяет частотному матричному неравенству*

$$(9) \quad [I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] > R^2, \quad \omega \in [0, \infty),$$

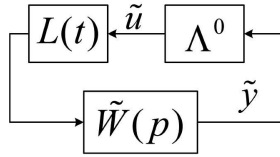


Рис. 1. Каноническая  $(W, \Lambda)$ -форма с нестационарными коэффициентами.

где  $R = \text{diag}[r_1, \dots, r_n]$  – диагональная матрица, чьи элементы удовлетворяют условиям  $0 < r_i \leq 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , тогда система (7) абсолютно устойчива при любых нелинейностях из класса (8), у которых

$$(10) \quad \alpha_i = \frac{1}{1 + r_i}; \quad \beta_i = \frac{1}{1 - r_i}; \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема 1 справедлива, если заменить нелинейные элементы (8) линейными нестационарными  $\varphi_i[\sigma(t), t] = l_i(t)\sigma_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$(11) \quad \sigma(t) = -W(p)\xi(t), \quad \xi(t) = L(t)\sigma(t),$$

где  $L(t) = \text{diag}[l_1(t), \dots, l_m(t)]$  – диагональная матрица нестационарных коэффициентов усиления, чьи номинальные значения равны единице (в этом случае система (11) асимптотически устойчива при  $\lambda_i = \lambda_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ).

Для этого случая теорема 1 имеет следующее важное

*Следствие 1. Пусть передаточная матрица  $W(p)$  в (11), взятая из (6), удовлетворяет частотному матричному неравенству (9), тогда система (11) асимптотически устойчива в целом для нестационарных коэффициентов усиления, лежащих в границах:*

$$(12) \quad \frac{1}{1 + r_i} \leq l_i(t) \leq \frac{1}{1 - r_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В отличие от [6, 7] указанные границы справедливы для нестационарного случая.

Задача 1 может быть решена для произвольного набора физических параметров с использованием канонической формы (5). Замкнутая система (5) с параметрами  $\lambda_i = \lambda_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , как и ранее, асимптотически устойчива по построению регулятора (4). Из следствия 1 получаем, что в каждый контур управления, соответствующий  $\tilde{u}_i$ , можно добавить нестационарные коэффициенты усиления, которые могут менять свои значения независимым и произвольным образом в пределах (12) и при этом система не потеряет устойчивости. Допустимые границы изменения этих коэффициентов  $l_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  легко могут быть пересчитаны в допустимые границы варьирования нестационарных физических параметров системы. Поясняющая структурная схема показана на рис. 1, где  $\tilde{W}$  – та же передаточная матрица, что и в (6), и  $\Lambda^0 = \text{diag}[\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0]$  – диагональная матрица, содержащая номинальные значения варьлируемых параметров.



Критерий робастной устойчивости, дающий решение задачи 1, был сформулирован в [9]:

*Теорема 2. Пусть передаточная матрица (6) удовлетворяет частотному матричному неравенству (9), тогда имеют место следующие допустимые границы нестационарных независимых изменений варьируемых параметров  $\lambda_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при которых сохраняется устойчивость:*

$$(13) \quad \frac{\lambda_i^0}{1 + r_i} \leq \lambda_i(t) \leq \frac{\lambda_i^0}{1 - r_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\lambda_i^0 > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  – известные номинальные значения варьируемых параметров.

В отличие от стационарных границ, полученных в [5–7], в которых фигурирует единственный общий радиус запасов устойчивости, в настоящей работе для нестационарных границ (13) изменений варьируемых параметров учитываются диапазоны, определяемые своими индивидуальными значениями радиусов запасов устойчивости (это далее уточняется в теореме 4).

Границы (13), очевидно, справедливы и для случая стационарных изменений исследуемых параметров.

### 3. Постановка задачи

Сформулируем две задачи синтеза робастного регулятора: в первой внешнее возмущение отсутствует (задача стабилизации), а во второй учитываются действия возмущений (задача подавления внешних возмущений).

*Задача 2 (задача робастной стабилизации). Для объекта (1) требуется найти регулятор (4), который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (4) для всех нестационарных отклонений физических параметров объекта от номинальных значений, лежащих в заданных интервалах*

$$\lambda_i^{\min} < \lambda_i(t) < \lambda_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\lambda_i^{\min}$ ,  $\lambda_i^{\max}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – заданные границы.

Следующая задача формулируется с учетом действия внешних возмущений  $f(t)$ , которые предполагаются из класса (2), (3).

Действие таких возмущений учитывается посредством требований к точности системы, которые вводятся в форме ограничений на установившиеся значения ошибок по регулируемым переменным:

$$y_{i, st} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Задача 3 (задача робастного подавления внешних возмущений). Для объекта (1) требуется найти регулятор (4), который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (4) для всех нестационарных отклонений физических параметров объекта от номинальных значений, лежащих в заданных интервалах

$$\lambda_i^{\min} < \lambda_i(t) < \lambda_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n},$$

а также удовлетворяет требованиям к точности при действии неизвестных внешних возмущений из класса (2), (3) при номинальных значениях физических параметров

$$(14) \quad y_{i, st} < \gamma y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где  $y_i^* > 0$ ,  $i = \overline{1, m_2}$  – заданные числа,  $\gamma > 0$  – заданное или минимизируемое число.

#### 4. Решение поставленных задач на основе $H_\infty$ -оптимизации

Решение обеих задач основано на технике  $H_\infty$ -оптимизации, стандартную формулировку которой можно записать как

$$(15) \quad \|T_{\bar{z}\bar{w}}\|_\infty < \gamma, \quad \bar{z} = T_{\bar{z}\bar{w}}(p)\bar{w},$$

где  $T_{\bar{z}\bar{w}}(p)$  – передаточная матрица замкнутой системы, связывающая расширенный вход  $\bar{w}$  системы с расширенным выходом  $\bar{z}$ ,  $\gamma$  – заданное или минимизируемое число.

Для использования этой техники необходимо так сформировать векторы  $\bar{w}$ ,  $\bar{z}$  и матрицу  $T_{\bar{z}\bar{w}}(p)$ , чтобы решение соответствующей  $H_\infty$ -задачи (15) являлось также решением для сформулированных выше задач 2 и 3.

Численное решение задачи (15) может быть выполнено подходящим стандартным программным обеспечением. Например, в настоящей работе использован пакет *Robust Control Toolbox* из MATLAB, так как формируемые здесь  $H_\infty$ -задачи могут оказаться вырожденными и соответственно для их решения требуется использовать подход на основе LMI [24].

##### 4.1. Решение задачи 2

Для решения задачи 2 уравнения расширенного объекта имеют вид

$$(16) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}(p)z_0 + W_{12}(p)u, & \tilde{u} &= \Lambda^0 \tilde{y}, \\ y &= W_{21}(p)z_0 + W_{22}(p)u, & u &= K(p)y, \\ z &= R_0 z_0, & z_0 &= \tilde{u} + w_1, & R_0 &= \text{diag}[r_1^0, r_2^0, \dots, r_n^0], \end{aligned}$$

где  $w_1$  – фиктивный вход объекта, используемый для обеспечения робастности замкнутой системы,  $0 < r_i^0 \leq 1$ ,  $i = \overline{1, n}$  – желаемые значения элементов  $r_i^0$  в матрице  $R$  из (9). Структурная схема  $(W, \Lambda, K)$ -формы для этой задачи изображена на рис. 2.

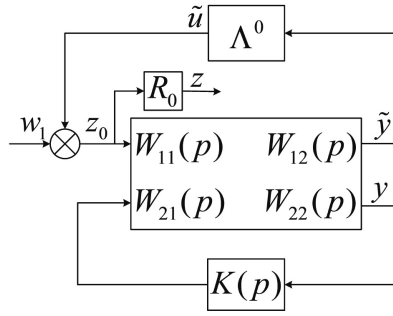


Рис. 2. Каноническая  $(W, \Lambda, K)$ -форма в случае задачи 2.

Соответствующие расширенные входной и выходной векторы и передаточная матрица в (15) записываются как

$$(17) \quad \bar{w} = w_1, \quad \bar{z} = z, \quad T_{\bar{z}\bar{w}} = R_0 T_{z_0 w_1},$$

где  $T_{z_0 w_1}$  – передаточная матрица замкнутой системы, связывающая векторы  $w_1$  и  $z_0$ .

Свойства решения задачи (15) для системы (1), (4) описываются следующей теоремой.

*Теорема 3. Пусть регулятор  $K(p)$  найден в результате решения соответствующей задачи (15)–(17), тогда он обеспечивает устойчивость системы (1), (4) при*

$$\frac{\lambda_i^0}{1 + r_i} \leq \lambda_i(t) \leq \frac{\lambda_i^0}{1 - r_i}, \quad \lambda_i^0 > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь,  $r_i = r_i^0/\gamma$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $r_i^0$  – заданные значения элементов диагональной матрицы  $R_0$ , а  $\gamma$  – значение, найденное при решении задачи (15).

Доказательство этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Опишем частотные свойства синтезированных систем. Пусть  $w_i(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы (5) по  $i$ -му фиктивному входу  $\tilde{u}_i$  (по  $i$ -му варьируемому параметру  $\lambda_i$ ). Тогда справедлива следующая

*Теорема 4. Пусть выполнено частотное матричное неравенство (9), тогда годограф Найквиста системы (5), разомкнутой по  $i$ -му фиктивному входу  $\tilde{u}_i$ , не касается круга радиуса  $r_i$  с центром в критической точке  $(-1, j0)$  на плоскости годографа  $w_i(j\omega)$ .*

Теорема 4 дает очень важную с физической точки зрения интерпретацию частотного матричного неравенства (9), проиллюстрированную на рис. 3, а именно: что диагональные элементы матрицы  $R = R_0/\gamma$  определяют радиус запасов устойчивости  $r_i$  системы, разомкнутой по  $i$ -му входу  $\tilde{u}_i$ . При этом

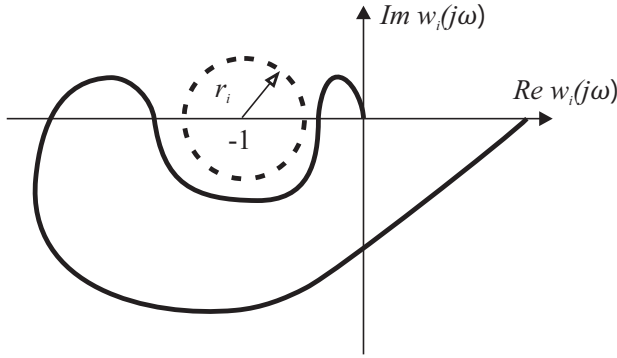


Рис. 3. Иллюстрация к теореме 4:  $r_i$  – радиус запасов устойчивости по  $i$ -му фиктивному входу  $\tilde{u}_i$ .

параметр  $\lambda_i$  является множителем передаточной функции  $w_i(p)$ , а задаваемые проектировщиком диагональные элементы  $r_i^0$  матрицы  $R_0$  определяют желаемые радиусы запасов устойчивости по  $i$ -му входу  $\tilde{u}_i$ .

#### 4.2. Решение задачи 3

Задача 3 также решается с помощью стандартной  $H_\infty$ -задачи (15), в которой уравнения расширенного объекта описываются аналогично [6, 7]:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y} &= W_{11}(p)z_1 + W_{12}(p)u + W_{13}(p)f, & \tilde{u} &= \Lambda^0 \tilde{y}, \\
 (18) \quad y &= W_{21}(p)z_1 + W_{22}(p)u + W_{23}(p)f, & u &= K(p)y, \\
 z_1 &= R_0(\tilde{u} + w_1), & z_2 &= Q^{1/2}y,
 \end{aligned}$$

где  $\underline{Q} = \text{diag}[q_1, \dots, q_{m_2}]$  – весовая матрица, элементы которой  $q_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m_2}$  выбираются так, чтобы обеспечить требования к точности системы (14). Структурная схема для  $(W, \Lambda, K)$ -формы показана на рис. 4.

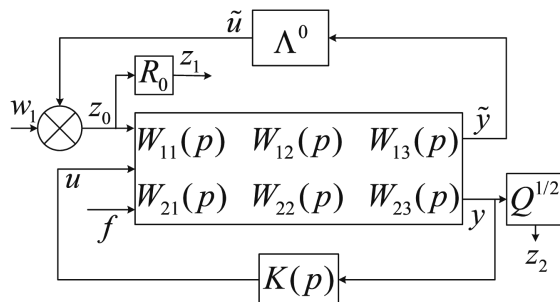


Рис. 4. Каноническая  $(W, \Lambda, K)$ -форма в случае задачи 3.

Учитывая структурную схему на рис. 4 и соответствующие уравнения (18), получаем следующие векторы  $\bar{w}$  и  $\bar{z}$ :

$$\bar{w}^T = [w_1^T \quad f^T], \quad \bar{z}^T = [z_1^T \quad z_2^T] = [(w_1^T + \tilde{u}^T)R_0 \quad y^T Q^{1/2}]$$

и окончательно матрицу замкнутой системы  $T_{\bar{z}\bar{w}}$ :

$$(19) \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{\bar{z}\bar{w}}(p)\bar{w} = \begin{bmatrix} R_0 T_{z_0 w_1} & R_0 T_{z_0 f} \\ Q^{1/2} T_{y w_1} & Q^{1/2} T_{y f} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ f \end{bmatrix},$$

где  $T_{z_0 w_1}$ ,  $T_{z_0 f}$ ,  $T_{y w_1}$ ,  $T_{y f}$  – передаточные матрицы замкнутой системы соответственно от  $w_1$  к  $z_0$ , от  $f$  к  $z_0$ , от  $w_1$  к  $y$  и от  $f$  к  $y$ .

*Теорема 5. Пусть решена задача (15), (19), в которой элементы диагональной матрицы  $Q$  выбраны согласно выражениям*

$$q_i = \left( \sum_{j=1}^{m_3} f_j^* \right)^2 / (y_i^*)^2, \quad i = \overline{1, m_2},$$

тогда регулятор  $K(p)$  обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1), (4) и установившиеся ошибки в следующих диапазонах:

$$(20) \quad \frac{\lambda_i^0}{1 + r_i} \leq \lambda_i(t) \leq \frac{\lambda_i^0}{1 - r_i}, \quad \lambda_i^0 > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_{j,st} < \gamma y_j^*, \quad j = \overline{1, m_2},$$

где  $r_i, i = \overline{1, n}$  и  $\gamma$  – те же самые переменные, что в теореме 3, а  $y_j^* > 0, j = \overline{1, m_2}$  – желаемые ошибки регулирования.

Из доказательства теоремы 5 следует, что замкнутая система (1), (4) или (5) сохраняет устойчивость при нестационарных отклонениях физических параметров объекта в диапазонах, заданных первым неравенством в (20). При этом гарантируемые радиусы запасов устойчивости  $r_i$  связаны с желаемыми радиусами запасов устойчивости  $r_i^0$  и реализовавшимся значением  $\gamma$  при решении задачи (15), (19) соотношениями  $r_i = r_i^0 / \gamma, i = \overline{1, n}$ .

Заметим, что второе неравенство в (П.4) (см. Приложение) при выборе весовой матрицы  $Q$  в соответствии с теоремой 5 приводит к выполнению требований к точности (второе неравенство в (20)) только при номинальных значениях варьируемых параметров  $\lambda_i = \lambda_i^0, i = \overline{1, n}$ .

## 5. Пример

В качестве иллюстративного примера взята известная задача о двухмассовой системе [21, 22]. Система, состоящая из двух тележек, связанных пружиной, описывается уравнениями

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, & \dot{x}_2 &= x_4, & \dot{x}_3 &= -qx_1 + qx_2 + u + f, \\ \dot{x}_4 &= qx_1 - qx_2, & y &= x_2, \end{aligned}$$

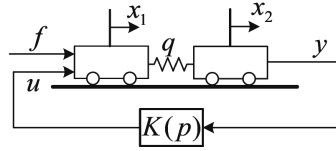


Рис. 5. Двухмассовая система.

где  $q$  – жесткость пружины, которая меняет свое значение в некотором неизвестном интервале. Номинальное значение  $q$  выбрано равным  $q_0 = 0,8$ . Сигнал внешнего возмущения  $f$  приложен в той же точке, что и управление. На рис. 5 схематично изображена структура объекта (21), замкнутого искомым регулятором  $K(p)$ .

Поясним физическую мотивацию рассмотрения нестационарных значений жесткости пружины  $q(t)$ : линейный закон Гука справедлив только при малых отклонениях от положения равновесия (сжатия/растяжения). При больших же отклонениях от положения равновесия (значительном растяжении или сжатии пружины) этот закон становится нелинейным, что позволяет представить его как линейный нестационарный закон, в котором коэффициент жесткости пружины меняется нестационарным образом [25].

В задаче 3 необходимо обеспечить заданную точность замкнутой системы по регулируемой и одновременно измеряемой переменной  $y$  и максимизировать запасы устойчивости по фиктивному контуру управления, содержащему варьировемый параметр  $q$ .

Система (21) записывается в  $(W, \Lambda, K)$ -форме (18), что уже было сделано в [6, 7], поэтому опустим детали этого перехода и сразу перейдем к формулированию  $H_\infty$ -задачи (15) для конкретной рассматриваемой системы. Для решения (15) использовалось стандартное программное обеспечение MATLAB, реализующее решение на основе LMI-техники, поэтому уравнения объекта необходимо представить в соответствующей обобщенной форме в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 \bar{w} + B_2 u; & \bar{z} &= C_1 x + D_{11} \bar{w} + D_{12} u; \\ y &= C_2 x + D_{21} \bar{w} + D_{22} u. \end{aligned}$$

Матрицы обобщенного объекта имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -q & q & 0 & 0 \\ q & -q & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T;$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} R_0 \cdot (-q & q & 0 & 0) \\ Q^{1/2} \cdot (0 & 1 & 0 & 0) \end{bmatrix}; \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]; \quad D_{12} = [0 \ 0]^T; \quad D_{21} = [0 \ 0]; \quad D_{22} = 0.$$

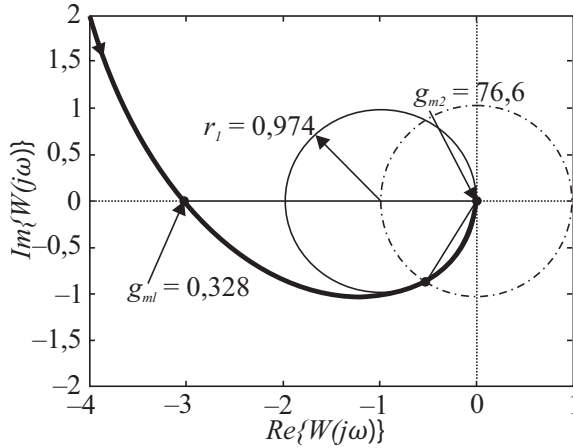


Рис. 6. Годограф Найквиста разомкнутой системы.

В численном эксперименте использовались следующие параметры: желаемая ошибка регулирования  $y^* = 0,5$ , внешнее возмущение ограничено величиной  $f^* = 1$ . Тогда соответствующий весовой коэффициент находится в соответствии с теоремой 5:

$$Q = (f^*)^2 / (y^*)^2 = 4, \quad Q^{1/2} = 2.$$

Второй параметр, необходимый для синтеза (желаемый радиус запасов устойчивости), выбран как  $R_0 = 0,9$ .

Синтез регулятора, реализованный с помощью функции `hinflmi` пакета Robust Control Toolbox MATLAB, дает регулятор:

$$(22) \quad K(p) = -\frac{1,045 \cdot 10^{12}(p + 0,5409)(p^2 + 0,713p + 1,049)}{(p^2 + 256,8p + 5,289 \cdot 10^4)(p^2 + 202,9p + 4,86 \cdot 10^6)}.$$

Оптимальное значение  $\gamma = 1,01895$  дает обеспечиваемый радиус запасов устойчивости  $R = R_0/\gamma = 0,883$ , что гарантирует системе сохранение устойчивости при нестационарных изменениях параметра  $q$  (при номинале  $q_0 = 0,8$ ), лежащих в следующих пределах (границах):

$$0,425 \leq q(t) \leq 6,853.$$

Последнее соответствует  $q^{\min} = q_0/(1 + R) = 0,425$  и  $q^{\max} = q_0/(1 - R) = 6,853$ . Можно найти более точные границы допустимых изменений нестационарного параметра  $q(t)$  без потери системой устойчивости, используя теорему 2, которая основана на круговом критерии (см. также [23]). Истинное значение параметра  $R = r_1$  в (9) равно 0,974, оно было найдено с помощью годографа Найквиста соответствующей передаточной функции разомкнутой системы (6) для  $\Lambda = q_0$ , изображенного на рис. 6. Границы, полученные с

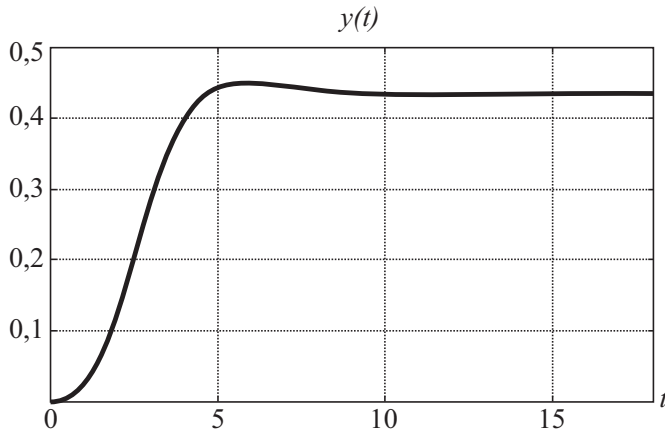


Рис. 7. Переходная характеристика замкнутой системы.

помощью годографа Найквиста, значительно шире, чем гарантируемые и составляют

$$0,406 \leq q(t) \leq 30,995.$$

Если рассматривать только стационарную неопределенность параметра  $q$ , тогда получим еще более широкие границы робастной устойчивости:

$$0,263 \leq q \leq 61,297.$$

Эти границы также получены на основе годографа Найквиста (рис. 6), на котором обозначены точки:  $g_{m1}$  ( $g_{m2}$ ) показывает во сколько раз можно уменьшить (увеличить) коэффициент усиления контура без потери устойчивости. При этом варьируемый параметр  $q$  является множителем передаточной функции разомкнутого контура, откуда и получаются вышеуказанные границы.

Все найденные границы значительно шире, чем известные. Сравнительный анализ различных наиболее успешных подходов к синтезу регулятора для объекта (21) проведен в [19].

Классические показатели запасов устойчивости по модулю и фазе определяются для контура управления, разомкнутого по реальному входу  $u$  (или выходу  $y$ ), и равны  $L = 35,4$  dB,  $\phi_z = 64,5^\circ$ .

Переходная характеристика замкнутой системы (21), (22) при  $f = 1$  показана на рис. 7. Можно заметить, что установившееся значение регулируемой переменной  $y_{st} = 0,434$  удовлетворяет требованиям к точности  $y_{st} < y^* = 0,5$ . Реализовавшееся значение ошибки регулирования не слишком сильно отличается от желаемого, что говорит о невысокой степени достаточности метода синтеза по этому показателю качества. На рис. 8 показана амплитудно-частотная характеристика передаточной функции от  $f$  к  $y$ , которая носит монотонно убывающий характер, из чего следует, что ступенчатое внешнее возмущение является наихудшим для системы (21), (22).



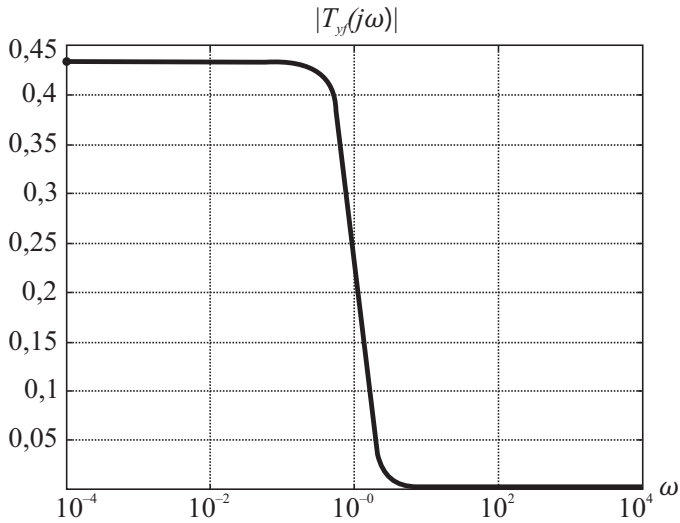


Рис. 8. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы.

В примере возмущение  $f$  приложено согласно с управлением к первой тележке, и требования к точности при этом выполняются. Заметим, что они также выполняются, если  $f$  приложить ко второй тележке.

## 6. Заключение

Предложен метод синтеза, который можно использовать для решения реальных инженерных задач, так как он обладает рядом достоинств:

- а) рассматриваемый практически важный класс внешних возмущений (2), (3) достаточно широк: он охватывает поэлементно ограниченные  $|f_i(t)| \leq f_i^*$ ,  $i = \overline{1, m_3}$  функции времени, которые, в частности, непрерывны и кусочно-дифференцируемы, что позволяет представить их абсолютно сходящимся рядом Фурье (2) (если частоты кратны) [10] (такие возмущения физически только и возможны в инженерной практике);
- б) в методе рассматриваются нестационарные отклонения физических параметров объекта;
- в) процедура синтеза сводится к решению стандартной задачи  $H_\infty$ -оптимизации;
- г) метод синтеза носит неитеративный характер, а найденный регулятор имеет порядок, не превышающий порядок объекта.

Вместе с тем, как показывают исследования, проведенные в [6, 8, 19], несмотря на значительные границы допустимых отклонений физических параметров от номинальных (при которых замкнутая система сохраняет устойчивость), возможна ситуация, когда радиус запасов устойчивости на физическом входе или выходе объекта управления весьма мал, что говорит о практической неработоспособности построенного регулятора [10]. Поэтому возникает задача развить предложенный в данной работе метод синтеза в направ-

лении дополнительного учета требований к радиусу запасов устойчивости на физическом входе/выходе объекта [8], хотя в рассмотренном примере запасы устойчивости в этих точках размыкания получились весьма солидными.

Кроме того, хотя быстродействие замкнутой системы (время регулирования) в примере получилось достаточно малым  $t_p \approx 10$  сек, учет требования к быстродействию системы при синтезе регулятора также необходим.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 3.* Из (15) и (17) следует, что выполняется неравенство

$$(П.1) \quad T_{z_0 w_1}^T(-j\omega)R_0^2 T_{z_0 w_1}(j\omega) < \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Принимая во внимание, что  $T_{z_0 w_1} = [I + W(j\omega)]^{-1}$  (см. [5–7]), получаем

$$(П.2) \quad [I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] > R_0^2 / \gamma^2, \quad \omega \in [0, \infty),$$

что совпадает с (9), где  $R^2 = R_0^2 / \gamma^2$ . Из теоремы 2 следует, что допустимые границы совпадают с аналогичными в теореме 3.

Из (П.2) при  $\omega \rightarrow \infty$  следует  $I > R_0 / \gamma$ , откуда заключаем, что реализованное значение  $\gamma$  будет удовлетворять неравенствам

$$\gamma > r_i^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

*Доказательство теоремы 4.* Пусть  $t_i(p)$  – передаточная функция замкнутой системы, связывающая  $i$ -ю компоненту вектора  $w_1$  с  $i$ -й компонентой вектора  $z_0$ . В силу диагональной структуры матрицы  $R_0$  передаточная функция от  $w_{1i}$  к  $z_i$  будет  $r_i^0 t_i(p)$ . Сама же  $t_i(p)$  связана с  $w_i(p)$  аналогом классического соотношения [10]

$$t_i(p) = 1/[1 + w_i(p)].$$

Таким образом, передаточная функция от  $w_{1i}$  к  $z_i$  будет  $r_i^0/[1 + w_i(p)]$ , а с другой стороны, она является  $i$ -м диагональным элементом передаточной матрицы  $R_0 T_{z_0 w_1}$ , которая в силу (17) удовлетворяет неравенству (15). Следовательно, и любой ее элемент удовлетворяет аналогичному соотношению, и тогда  $\|r_i^0/[1 + w_i(p)]\|_\infty < \gamma$ , или в эквивалентной форме

$$(П.3) \quad [1 + w_i(-j\omega)][1 + w_i(j\omega)] > (r_i^0 / \gamma)^2 = r_i^2, \quad \omega \in [0, \infty).$$

*Доказательство теоремы 5.* Предположим, что задача (15) решена для матрицы  $T_{zw}(p)$  из (19), тогда соответствующие неравенства справедливы для каждого отдельного блока передаточной матрицы. Рассмотрим только диагональные блоки:

$$(П.4) \quad \|R_0 T_{z_0 w_1}\|_\infty < \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{yw}\|_\infty < \gamma.$$

Первое неравенство можно представить в форме (П.1), для которой проводятся рассуждения аналогичные тем, что выполнялись для случая теоремы 3. Из чего следует, что первое неравенство в (20) выполняется.

Второе блочное неравенство в (П.4) обеспечивает требования к точности (14), которое можно представить в эквивалентной форме:

$$T_{yw}^T(-j\omega)QT_{yw}(j\omega) < \gamma^2 I.$$

В [10] доказано, что если последнее неравенство выполняется, тогда при действии возмущения из класса (2), (3) установившиеся значения регулируемых переменных удовлетворяют неравенствам

$$(П.5) \quad q_i y_{i,st}^2 < \gamma^2 \left( \sum_{j=1}^{m_3} f_j^* \right)^2, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Если выбрать весовые коэффициенты  $q_i$ ,  $i = \overline{1, m_2}$  согласно условиям теоремы 5 и подставить их в (П.5), то после очевидных преобразований придем к целевому неравенству (14).

Итак, оба неравенства в (20) выполняются, и теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John Wiley & Sons, 2006.
3. Bhattacharyya S.P., Datta A., Keel L.H. Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization. CRC Press Taylor & Francis Group, 2009.
4. Åström K.J., Kumar P.R. Control: A perspective // Automatica. 2014. V. 50. No. 1. P. 3–43.
5. Честнов В.Н. Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // АиТ. 1999. № 3. С. 229–238.  
Chestnov V.N. Synthesis of robust controllers for multivariable systems using circular frequency inequalities: The case of parametric uncertainty // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 3. P. 484–491.
6. Честнов В.Н.  $H_\infty$ -подход к синтезу регуляторов при параметрической неопределенности и полигармонических внешних возмущениях // АиТ. 2015. № 6. С. 112–127.  
Chestnov V.N.  $H_\infty$ -approach to controller synthesis under parametric uncertainty and polyharmonic external disturbances // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 1036–1048.
7. Chestnov V.N. Design of Controllers under Parametric Uncertainty and Power-Bounded External Disturbances // Proc. of the 8th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND-2015). 2015. P. 56–61.

8. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Simultaneous Providing of Stability Margins Under Parametric Uncertainty and at a Plant Input/Output // Proc. of 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB-2020). 2020. P. 1–4.
9. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Modified circle criterion of absolute stability and robustness estimation // Proc. of 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB-2018). 2018. P. 1–4.
10. *Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе  $H_\infty$ -оптимизации // *АиТ*. 2019. № 10. С. 132–152.  
*Chestnov V.N.* Synthesis of Multivariable Systems According to Engineering Quality Criteria Based on  $H_\infty$ -Optimization // *Autom. Remote Control*. 2019. V. 80. No. 10. P. 1861–1877.
11. *Dahleh M., Diaz-Bobillo I.J.* Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach. N.J.: Prentice-Hall, 1995.
12. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
13. *Rösinger C.A., Scherer C.W.* Lifting to Passivity for  $H_2$ -Gain-Scheduling Synthesis with Full Block Scalings // Preprints of the 21st IFAC World Congress. 2020. P. 7382–7388.
14. *Datar A., Gonzalez A.M., Werner H.* Gradient-based Cooperative Control of quasi-Linear Parameter Varying Vehicles with Noisy Gradients // Preprints of the 22nd IFAC World Congress. 2023. P. 8692–8697.
15. *Burgin E., Biertümpfel F., Pfifer H.* Linear Parameter Varying Controller Design For Satellite Attitude Control // Preprints of the 22nd IFAC World Congress. 2023. P. 3455–3460.
16. *Schuchert P., Karimi A.* Frequency domain LPV controller synthesis for a positioning system with uncertain scheduling parameters // Preprints of the 22nd IFAC World Congress. 2023. P. 1441–1448.
17. *Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., Safonov M.G.* Robust Control Toolbox 3. User's guide. Natick (Mass.): The MathWorks, Inc, 2010.
18. *Boyd S.P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
19. *Честнов В.Н., Саммиорин Н.И.* Синтез регуляторов по заданному показателю колебательности: параметрические и внешние возмущения, ограниченные по мощности // *Пробл. управл.* 2017. № 3. С. 17–25.
20. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Robust Controller Design for Systems with Non-Stationary Variations of Parameters and Bounded External Disturbances // Proc. 2020 24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2020). 2020. P. 304–309.
21. *Farag A., Werner H.* Robust  $H_2$  Controller Design and Tuning for the ACC Benchmark Problem and a Real-time Application // Proc. of the 15th World Congress IFAC (IFAC-2002). 2002.
22. *Haddad W.M., Collins E.G., Bernstein D.S.* Robust Stability Analysis Using the Small Gain, Circle, Positivity and Popov Theorems. A Comparative Study // *IEEE Trans. Contr. Syst. Techn.* 1993. V. 1. No. 4. P. 290–293.

23. *Якубович В.А.* Методы теории абсолютной устойчивости / Методы исследования нелинейных систем автоматического управления (под ред. Нелепина Р.А.). М.: Наука, 1975. С. 74–180.
24. *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control // Int. J. Robust. Nonlinear Control. 1994.V. 4. P. 421–448.
25. *Пятницкий Е.С.* Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // АиТ. 1970. № 1. С. 5–15.  
*Pyatnitskij E.S.* Absolute stability of nonstationary nonlinear systems // Autom. Remote Control. 1970. V. 31. No. 1. P. 1–10.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. Д.В. ШАТОВ, канд. техн. наук (dvshatov@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Национальный исследовательский университет  
«Московский физико-технический институт», Долгопрудный)

## ОДНОВРЕМЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ И ТЕХНИКИ $D$ -РАЗБИЕНИЯ<sup>1</sup>

Рассматривается задача одновременной стабилизации семейства линейных систем второго порядка с помощью статической линейной обратной связи по состоянию применительно к системам с переключениями. В основе предложенного подхода лежит известный метод синтеза, когда с помощью решения задачи линейного программирования ищется статический регулятор, приводящий матрицы некоторого семейства, составляющего переключаемую систему, в замкнутом состоянии к сверхустойчивости, что гарантирует экспоненциальную устойчивость соответствующей переключаемой системы. Данный метод развивается на случай, когда не все семейство матриц может быть одновременно приведено к сверхустойчивости: для неприводимых матриц с помощью техники  $D$ -разбиения определяются линейные ограничения на множество стабилизирующих регуляторов, которые добавляются к ограничениям в задаче линейного программирования. Кратко анализируются свойства синтезированной переключаемой системы. Приводится пример решения задачи синтеза предложенным подходом.

*Ключевые слова:* нестационарные системы, синтез регулятора, сверхустойчивость, статический регулятор по состоянию, одновременная стабилизация, системы с переключениями.

DOI: 10.31857/S0005231024060038, EDN: XXQHNFY

### 1. Введение

Задача *одновременной стабилизации* заключается в поиске одного закона управления, обеспечивающего устойчивость всех элементов некоторого семейства динамических объектов. Такие задачи составляют отдельный класс в области робастного управления. Наибольший интерес они вызывали в период с конца 80-х и в 90-е годы XX в. [1–6]. В прикладном смысле популярность получил подход на основе линейных матричных неравенств (ЛМН), предложенный в [2, 7], что связано с появлением эффективных численных методов решения задач полуопределенного программирования.

---

<sup>1</sup> Результаты исследований, представленные в разделе 4, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

Содержательно близкие задачи синтеза возникают в теории *систем с переключениями* (иначе теории *переключаемых систем*) [8, 9], которая изучает нестационарные системы специального вида. Параметры (и структура) таких систем меняются с течением времени по некоторому правилу, называемому *законом переключений*. Далее рассматриваются только линейные переключаемые системы, когда в качестве меняющихся параметров (между которыми происходят переключения) выступают матрицы линейных подсистем из некоторого известного множества. Решение задачи одновременной стабилизации для таких систем доставляет лишь необходимое условие асимптотической устойчивости, которое не учитывает влияние переключений на устойчивость системы, тогда как в самом общем случае задача синтеза регулятора переключаемой системы состоит в поиске закона управления, гарантирующего асимптотическую устойчивость при любом произвольном законе переключений. Такая задача синтеза является намного более сложной, чем просто одновременная стабилизация. Основным инструментом ее решения служит поиск регуляторов, обеспечивающих существование общей функции Ляпунова у всех подсистем.

Описанная общая задача стабилизации линейных систем с переключениями была исследована, в частности, в [10, 11], где был предложен новый подход к ее решению с помощью статического регулятора по состоянию. Основной идеей подхода было использование *сверхустойчивости*, которая применительно к теории управления была предложена и изучена Б.Т. Поляком и П.С. Щербаковым в [12, 13]. В [12] описаны сверхустойчивые матрицы и исследованы свойства линейных систем с такими матрицами (сверхустойчивые системы), а в [13] рассмотрены задачи синтеза регуляторов, придающих замкнутой системе свойство сверхустойчивости, там же исследован синтез статического регулятора по состоянию в форме решения задачи линейного программирования. В [14–17] сверхустойчивость использовалась для решения иных задач теории управления.

Использование сверхустойчивости применительно к переключаемым системам обусловлено следующим свойством: любое семейство сверхустойчивых систем одинакового порядка образует экспоненциально устойчивую систему с переключениями при любом законе переключений [18]. Именно это свойство используется в упомянутых работах [10, 11] для того, чтобы при синтезе переключаемой системы заведомо гарантировать ее устойчивость. В [11] приведена теорема, распространяющая результаты [13] на случай систем с переключениями. В частности, [11, Теорема 3] дает необходимые и достаточные условия существования регулятора, который приводит все семейство исходных систем к сверхустойчивости, но не предлагает конструктивный алгоритм синтеза.

В [13] показано, что сверхстабилизации регулятором по состоянию можно добиться далеко не всегда, поэтому подход, описанный в [11], может оказаться неприменимым, так как не существует сверхстабилизирующего регулятора, удовлетворяющего всем необходимым ограничениям одновременно. В настоя-

шей работе предложена модификация подхода [11], в которой для подсистем, не приводимых к сверхустойчивости, ищется просто стабилизирующий регулятор. Процедура синтеза сводится к решению задачи линейного программирования (так же как в [13]), в которой линейные ограничения разбиваются на два типа: первый задается системами, которые можно привести к сверхустойчивости, а второй – теми, которые нельзя. Для последних систем ограничения, задающие область стабилизирующих регуляторов, ищутся с помощью техники  $D$ -разбиения [19, 20] исследованием устойчивости характеристического полинома замкнутой системы. При решении описанной задачи линейного программирования гарантируется только устойчивость отдельных подсистем переключаемой системы (т.е. она представляет собой классическую задачу об одновременной стабилизации), а свойство экспоненциальной устойчивости при произвольных переключениях сохраняется только для подмножества сверхустойчивых матриц.

Еще одним ограничением подхода служит то, что он применим только к переключаемым системам второго порядка, так как  $D$ -разбиение трудноосуществимо для случаев исследования более чем двух параметров. Однако тут следует отметить общую сложность задач анализа и синтеза переключаемых систем даже в простых случаях невысокого порядка [8, 21, 22]. По сути, единственным эффективным методом анализа и синтеза устойчивых переключаемых систем является численная проверка существования общей квадратичной функции Ляпунова у всех ее подсистем [7, 23], что является достаточным условием устойчивости при любом сигнале переключений.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описаны сверхустойчивые системы, их свойства и применение в задачах стабилизации линейных систем с переключениями. Раздел 3 содержит формальную постановку задачи синтеза регулятора. В разделе 4 эта задача решается, описан алгоритм синтеза и кратко анализируются свойства системы с переключениями, замкнутой найденным регулятором. В разделе 5 приведен численный пример решения задачи одновременной стабилизации предложенным подходом. Работа завершается выводами и описанием возможных перспектив развития подхода.

## 2. Предварительные сведения

### 2.1. Сверхустойчивость линейных систем

Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется сверхустойчивой [12], если на ее главной диагонали стоят отрицательные числа, которые по абсолютной величине превосходят сумму абсолютных величин внедиагональных элементов в той же строке. Эти условия записываются как

$$-a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > 0, \quad i, j = \overline{1, n},$$

где  $a_{ij}$  – элемент матрицы  $A$ , расположенный в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце.



Величину

$$\sigma(A) = \sigma = \min_i \left( -a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right), \quad i, j = \overline{1, n}$$

называют *степенью сверхустойчивости* матрицы  $A$ .

Линейная стационарная система

$$(1) \quad \dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

у которой  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $x_0 \neq 0$  – начальные условия, а матрица  $A$  – сверхустойчивая, называется *сверхустойчивой системой*.

В [12] показано, что сверхустойчивая система (1) устойчива в смысле  $\operatorname{Re}\{\lambda(A)\} < 0$ , где  $\lambda(\cdot)$  – собственные числа матрицы, а для ее вектора состояния при любых начальных условиях справедлива оценка:

$$(2) \quad \|x\|_\infty \leq \|x_0\|_\infty e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0,$$

где  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{[i]}|$  – векторная  $\infty$ -норма,  $x_{[i]}$  –  $i$ -я компонента вектора  $x$ .

Из этого следует, что у сверхустойчивой системы (1) есть неквадратичная функция Ляпунова вида

$$(3) \quad V(x) = \|x\|_\infty.$$

Этот результат оказывается весьма полезным для анализа и синтеза систем с переключениями.

## 2.2. Системы с переключением: сверхустойчивость и сверхстабилизация

Рассмотрим линейную систему с переключениями

$$(4) \quad \dot{x}(t) = A_{\rho(t)} x(t), \quad x(0) = x_0 \neq 0,$$

где  $A_{\rho(t)} \in \mathcal{A} = \{A_s \in \mathbb{R}^{n \times n} : s \in \mathcal{S}\}$  – активная (реализуемая) в текущий момент времени матрица,  $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$ ,  $S \in \mathbb{N}$  – конечное множество индексов. Значение матрицы  $A_{\rho(t)}$  задается кусочно-постоянным измеримым сигналом переключений

$$(5) \quad \rho(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{S}.$$

Тем самым  $A_{\rho(\cdot)}$  является матричнозначной функцией на вещественной оси, принимающей значения из множества вещественных матриц  $\mathcal{A}$ .

Некоторые дополнительные ограничения на  $\rho(t)$  будут оговорены отдельно в соответствующих разделах. Далее в индексах указание зависимости от времени функции  $\rho(t)$  для простоты опущено.

В [18, Теорема 1] доказано, что если множество  $\mathcal{A}$  содержит только сверхустойчивые матрицы, то система (4) является экспоненциально устойчивой при любом сигнале переключений (5) и произвольных начальных условиях  $x_0$ . Такую систему принято называть сверхустойчивой системой с переключениями. Более того, этот результат справедлив для любых (в том числе бесконечных) множеств сверхустойчивых матриц любой размерности.

Доказательство соответствующей теоремы в [18] основано на неравенстве (2) и анализе верхних оценок вектора состояния системы (4). Более просто, [18, Теорема 1] является следствием (3), так как  $\|x\|_\infty$  представляет собой общую функцию Ляпунова для всех сверхустойчивых систем.

В [10, 11] рассматривалась динамическая система с переключениями вида

$$(6) \quad \dot{x} = A_\rho x + b_\rho u, \quad A_\rho \in \mathcal{A}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b_\rho \in \mathcal{B} = \{b_s \in \mathbb{R}^n, s \in \mathcal{S}\},$$

где  $b_\rho$  – активный вектор при управлении, который вводится по аналогии с матрицей системы  $A_\rho$  в (4),  $u \in \mathbb{R}$  – управляющий сигнал, формируемый линейным статическим регулятором по состоянию:

$$u = k^\top x,$$

где  $k \in \mathbb{R}^n$  – вектор-столбец его коэффициентов.

В [11] ставилась задача поиска статического регулятора  $k$ , одновременно приводящего к сверхустойчивости все множество матриц

$$(7) \quad \mathcal{M} = \{M_s = A_s + b_s k^\top, s \in \mathcal{S}\}$$

замкнутой системы  $\dot{x}(t) = M_\rho x(t) = (A_\rho + b_\rho k^\top)x(t)$ ,  $M_\rho \in \mathcal{M}$ . Если такой регулятор существует, то он называется *одновременно сверхстабилизирующим*.

В (7) и далее индекс « $s$ » используется у матриц (и их элементов), чтобы подчеркнуть, что данные выражения относятся к элементам множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{M}$ , а не к активным матрицам  $A_\rho$  или  $M_\rho$ .

В [11, Теорема 3] сформулированы необходимые и достаточные условия существования одновременно сверхстабилизирующего регулятора (они определяются разрешимостью специальной системы линейных неравенств и проверяются численно). С практической точки зрения эти условия удобно представить в виде следующей задачи линейного программирования:

$$(8) \quad \begin{aligned} & \max \sigma, \\ & -(a_{ij}^s + b_i^s k_j) - \sum_{j \neq i} n_{ij}^s \geq \sigma, \quad i = \overline{1, n}, \\ & -n_{ij}^s \leq a_{ij}^s + b_i^s k_j \leq n_{ij}^s, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad s \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

где  $a_{ij}^s + b_i^s k_j = m_{ij}^s$  – элементы матриц из множества (7) замкнутой системы. В задаче (8) переменными являются степень сверхустойчивости  $\sigma$ , коэффициенты  $k_j$  регулятора и неотрицательные вспомогательные скалярные переменные  $n_{ij}^s$ .

В такой формулировке условия существования сверхстабилизирующего регулятора (или разрешимости задачи (8)) дает теорема 2.1 из [13], которая утверждает, что если  $\sigma$ ,  $k$  – решение задачи (8) и  $\sigma > 0$ , то регулятор  $k$  – одновременно сверхстабилизирующий, в противном случае (при  $\sigma \leq 0$ ) сверхстабилизация управлением вида  $u = k^\top x$  невозможна.

### 3. Постановка задачи

Рассмотрим задачу синтеза сверхстабилизирующего статического регулятора по состоянию для двумерной системы с переключениями вида

$$(9) \quad \dot{x} = A_\rho x + bu, \quad u = k^\top x, \quad A_\rho \in \mathcal{A} = \{A_s \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, s \in \mathcal{S}\},$$

где в отличие от (6) матрицы  $A_s$  множества  $\mathcal{A}$  имеют размерность 2, а вектор  $b$  задан и не подвержен переключениям.

Синтезировать сверхустойчивый регулятор, решив задачу (8), даже в этом более узком и простом случае можно далеко не всегда. В [20, стр. 138] авторы выделяют некоторые случаи для фиксированных матриц в (9), когда сверхстабилизация заведомо невозможна: например, если вектор  $b \in \mathbb{R}^2$  содержит нулевые элементы, а соответствующая строка в матрице  $A$  не удовлетворяет условиям сверхустойчивости.

Далее в (9) положим  $b = [1 \ 1]^\top$ . Для этого случая в [13] получено необходимое и достаточное условие сверхстабилизируемости матриц  $A_s$ :

$$(10) \quad \tau(A_s) = a_{11}^s - a_{21}^s + a_{22}^s - a_{12}^s < 0;$$

а если  $\tau(A_s) \geq 0$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , то сверхстабилизация статическим регулятором по состоянию матрицы  $A_s$  невозможна.

Также будем предполагать, что среди матриц  $A_s \in \mathcal{A}$  есть не приводимые к сверхустойчивости согласно условию (10). Семейство таких матриц обозначим через  $A_\phi$ ,  $\phi \in \mathcal{S}_\phi \subset \mathcal{S}$ . Остальные матрицы, приводимые к сверхустойчивости, обозначаются как  $A_\psi$ ,  $\psi \in \mathcal{S}_\psi \subset \mathcal{S}$ , естественно  $\mathcal{S}_\psi \cup \mathcal{S}_\phi = \mathcal{S}$ .

Рассмотрим следующую задачу синтеза.

*Задача 1. Для системы (9) найти статический стабилизирующий регулятор по состоянию, который для семейства матриц  $A_\psi$  обеспечивает сверхустойчивость матриц  $M_\psi = A_\psi + bk^\top$  замкнутой системы, а для остальных матриц  $A_\phi$  – устойчивость замкнутой системы.*

Задача 1 является задачей одновременной стабилизации, когда для нескольких объектов (подсистем) ищется общий стабилизирующий регулятор, и гарантировать ее разрешимость заранее невозможно. При этом устойчивость системы с переключениями, замкнутой найденным регулятором, также не гарантируется (в отличие от задачи (8)). Более подробно свойства решения задачи 1 в приложении к устойчивости систем с переключениями описаны в следующем разделе.

#### 4. Синтез стабилизирующего регулятора

Из-за наличия матриц  $A_\phi$ ,  $\phi \in \mathcal{S}_\phi$ , не являющихся сверхстабилизируемыми, решение задачи 1 с помощью (8) заведомо невозможно.

Для решения задачи 1 предлагается подход, основанный на решении задачи линейного программирования, который можно рассматривать как модификацию задачи (8), в которой для не приводимых к сверхустойчивости матриц будем использовать линейные по  $k$  ограничения, обеспечивающие устойчивость замкнутой системы с матрицами  $M_\phi$ . Такие ограничения могут быть получены с помощью техники  $D$ -разбиения [19, 20], которая описана далее.

Для простоты индексы  $\phi$  у матриц  $A$  и  $M$  и их элементов опущены. С учетом  $b = [1 \ 1]^\top$  характеристический полином матрицы замкнутой системы

$$M = A + bk^\top = \begin{bmatrix} a_{11} + k_1 & a_{12} + k_2 \\ a_{21} + k_1 & a_{22} + k_2 \end{bmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} d(s, k) &= \det(sI - M) = \\ &= s^2 - s(k_1 + k_2 + a_{11} + a_{22}) + k_1(a_{22} - a_{12}) + k_2(a_{11} - a_{21}) + \det(A). \end{aligned}$$

Согласно [20] при изменении  $k$  расположение корней  $d(s, k)$  может измениться только в случае, если вещественный корень (или вещественная часть пары комплексно-сопряженных корней) перейдет через ноль (через мнимую ось на комплексной плоскости). Соответствующие границы  $D$ -разбиения описываются параметрическим уравнением  $d(j\omega, k) = 0$  или в явной форме:

$$(11) \quad \begin{cases} -\omega^2 + k_1(a_{22} - a_{12}) + k_2(a_{11} - a_{21}) + \det(A) = 0, \\ \omega(k_1 + k_2 + a_{11} + a_{22}) = 0. \end{cases}$$

При  $\omega = 0$  система (11) имеет особое решение

$$(12) \quad k_1(a_{22} - a_{12}) + k_2(a_{11} - a_{21}) + \det(A) = 0,$$

которое дает уравнение одной из границ.

Уравнение второй границы задается равенством, полученным из второго уравнения в (11):

$$(13) \quad k_1 + k_2 + a_{11} + a_{22} = 0,$$

с той разницей, что границей служит не вся прямая, а луч, исходящий из точки пересечения с прямой (12), который параметрически задается функциями:

$$(14) \quad \begin{aligned} k_1(\omega) &= \frac{1}{r}(\omega^2 + a_{11}^2 - a_{21}[a_{11} + a_{22} - a_{12}]), \\ k_2(\omega) &= -\frac{1}{r}(\omega^2 + a_{22}^2 - a_{12}[a_{11} + a_{22} - a_{21}]), \\ r &= -a_{11} - a_{12} + a_{21} + a_{22}, \quad \omega \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Границы  $D$ -разбиения, задаваемые (12) и (13), (14), разбивают плоскость параметров регулятора  $(k_1, k_2)$  на три области:

– вещественные части обеих корней полинома  $d(s, k)$  неотрицательные ( $\text{Re}\{\lambda_{1,2}(M)\} \geq 0$ );

– один корень полинома  $d(s, k)$  устойчив, а второй – нет ( $\text{Re}\{\lambda_1(M)\} < 0$ ,  $\text{Re}\{\lambda_2(M)\} \geq 0$ );

– оба корня полинома  $d(s, k)$  устойчивы ( $\text{Re}\{\lambda_{1,2}(M)\} < 0$ ).

Последняя область, где матрица  $M$  замкнутой системы устойчива, задает множество стабилизирующих регуляторов для соответствующей матрицы  $A$ . Границы этого множества задаются линейными ограничениями, получаемыми из (12), (13).

Используя найденные ограничения, приходим к следующей задаче линейного программирования, разрешающей задачу 1:

$$(15) \quad \begin{aligned} & \max \sigma, \\ & -(a_{ij}^\psi + k_j) - \sum_{j \neq i} n_{ij}^\psi \geq \sigma, \quad i = 1, 2, \\ & -n_{ij}^\psi \leq a_{ij}^\psi + k_j \leq n_{ij}^\psi, \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \psi \in \mathcal{S}_\psi, \\ & c_i^\phi k^\top + z_i^\phi < 0, \quad i = 1, 2, \phi \in \mathcal{S}_\phi. \end{aligned}$$

В (15) ограничения на элементы матриц замкнутых подсистем  $M_\psi$ ,  $\psi \in \mathcal{S}_\psi$  совпадают с аналогичными в задаче (8). Векторы  $c_i^\phi \in \mathbb{R}^2$  и скаляры  $z_i^\phi \in \mathbb{R}$ , найденные с помощью  $D$ -разбиения, задают линейные ограничения, обеспечивающие устойчивость замкнутой системы с матрицами  $M_\phi$ .

Теперь можно сформулировать алгоритм решения задачи 1 для системы (9).

*Алгоритм 1.*

1. Найти подмножества  $A_\phi$  и  $A_\psi$  матриц объекта  $A_s \in \mathcal{A}$  с помощью (10).
2. Для матриц  $A_\psi$  построить  $D$ -разбиение согласно описанному подходу и найти параметры ограничений, используя (12), (13).
3. Сформировать и решить задачу линейного программирования (15).

Существование решения задачи (15) определяется теми же условиями, что и у задачи (8): если найдено решение  $k$ ,  $\sigma > 0$ , то задача 1 решена.

Описанный алгоритм может использоваться для решения общей задачи с произвольным вектором  $b = [b_1 \ b_2]^\top \in \mathbb{R}^2$  в системе (9). Однако в этом случае нельзя использовать критерий (10) для поиска множества  $A_\phi$ ,  $\phi \in \mathcal{S}_\phi$ , и в первом пункте алгоритма 1 следует проверять сверхстабилизируемость матриц  $A_s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , используя процедуру синтеза из [13, раздел 2]. В этом случае система (11) примет вид

$$\begin{cases} -\omega^2 + k_1(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + k_2(b_2 a_{11} - b_1 a_{21}) + \det(A) = 0, \\ \omega(k_1 b_1 + k_2 b_2 + a_{11} + a_{22}) = 0. \end{cases}$$

Соответственно изменятся расчетные формулы (12), (13) и (14) для поиска границ области устойчивости.

Следует отметить, что первый пункт алгоритма 1 позволяет проверить только необходимое условие одновременной сверхстабилизируемости, а именно сверхстабилизируемость отдельных матриц, причем для фиксированного вектора  $b$ . Но даже если все матрицы  $A_s$ ,  $s \in \mathcal{S}$  сверхстабилизируемы по отдельности, они в совокупности могут не быть одновременно сверхстабилизируемыми. В этом случае алгоритм 1 можно немного модифицировать: формировать семейство  $A_\psi$  «вручную», используя в качестве целевого показателя условие

$$\max_{\mathcal{S}} |\mathcal{S}_\psi|,$$

т.е. искать разрешимую задачу (15), в которой максимально возможное число матриц из  $\mathcal{A}$  приводится к сверхустойчивости. Такая задача является комбинаторной и для небольших размерностей  $\mathcal{S}$  решается простым перебором. Для больших размерностей можно искать множество  $\mathcal{S}_\psi$  на основе анализа области пересечения множеств сверхстабилизирующих регуляторов матриц  $A_s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , которые можно построить в явном виде, проанализировав неравенства  $-m_{ii}^s > |m_{ij}^s|$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , подробнее см. пример в разделе 5.

Заметим также, что существует вырожденный случай, когда ни одну матрицу из  $\mathcal{A}$  нельзя привести к сверхустойчивости с помощью статического регулятора. Тогда применение предложенного подхода сводится к анализу пересечения областей стабилизирующих регуляторов, которые находятся  $D$ -разбиением. Если пересечение областей непусто, то оно составляет множество одновременно стабилизирующих регуляторов по состоянию, а если пусто, то таких регуляторов не существует. Найденное множество можно также использовать для оптимизации на нем иных критериев оптимальности регулятора [23, 24]. При этом область одновременно стабилизирующих регуляторов имеет простой вид, так как задается системой линейных неравенств.

Выше упоминалось, что система с переключениями (9) может терять свойство экспоненциальной устойчивости при любом сигнале переключений, имеющем место для решения задачи (8) (точнее оно сохраняется только для переключений между сверхустойчивыми матрицами  $A_\psi$ ,  $\psi \in \mathcal{S}_\psi$ ) в то время как для всей системы (9) выполняется лишь необходимое условие устойчивости переключаемой системы – устойчивость каждой отдельной матрицы множества  $\mathcal{M}$ .

В силу последнего свойства можно использовать известные подходы к обеспечению устойчивости системы (9) за счет введения ограничений на закон переключений  $\rho(t)$ . Например, известен подход, в котором ограничивается максимальная частота переключений. Для этого вводится понятие *времени простоя (dwell-time)*, которое обозначается через  $t_d > 0$ . Оно определяется как минимальный интервал времени между двумя соседними переключе-

чениями, гарантирующий устойчивость переключаемой системы при любом порядке переключений. В [25] предложен алгоритм поиска верхней оценки  $t_d$ , в основе которого лежит следующая теорема.

*Теорема 1* [25]. Пусть  $\hat{t}_d > 0$  – заданное число. Если существуют такие  $P_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $i \in \mathcal{S}$ , что

$$\begin{cases} P_i > 0, & \forall i, \\ A_i^\top P_i + P_i A_i < 0, & \forall i, \\ e^{A_i^\top \hat{t}_d} P_j e^{A_i \hat{t}_d} < P_i, & \forall i \neq j, \end{cases}$$

то система (9) экспоненциально устойчива для любого закона  $\rho(t)$ , ограниченного временем простоя  $\hat{t}_d$ .

Оценка времени  $t_d$  ищется одномерным поиском: сначала выбирается некоторое достаточно большое число  $\tau_0 > 0$ , для которого условия теоремы 1 при  $A_i = M_i$ ,  $\forall i$  выполняются, тогда искомая оценка будет  $\hat{t}_d \in (0, \tau_0]$ . Далее  $\hat{t}_d$  определяется с желаемой точностью методом половинного деления отрезка. Найденная оценка времени простоя является наилучшей в смысле квадратичных функций Ляпунова.

## 5. Пример

Рассмотрим систему (9) при  $b = [1 \ 1]^\top$  и с множеством матриц  $\mathcal{A}$ :

$$(16) \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S} = \{1, 2, 3\},$$

где  $A_s$  имеют следующие значения  $\tau(A_s)$  из формулы (10) и собственных чисел  $\lambda(A_s)$ :

$$\begin{aligned} \tau(A_1) &= -1, & \tau(A_2) &= -5, & \tau(A_3) &= 1, \\ \lambda(A_1) &= -1,5 \pm j1,658, & \lambda(A_2) &= \{3,372, -2,372\}, & \lambda(A_3) &= 1 \pm j1,414. \end{aligned}$$

Матрицы  $A_1$  и  $A_2$  можно сверхстабилизировать, а матрицу  $A_3$  – нет, согласно первому пункту алгоритма 1 формируются семейства матриц

$$A_\psi = \{A_1, A_2\} \quad \text{и} \quad A_\phi = A_3.$$

С помощью техники  $D$ -разбиения на основе (12)–(14) определяется область стабилизирующих регуляторов для матрицы  $A_3$ , ее границы определяются следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} 2k_1 - k_2 + 3 &> 0, \\ k_1 + k_2 + 2 &< 0. \end{aligned}$$

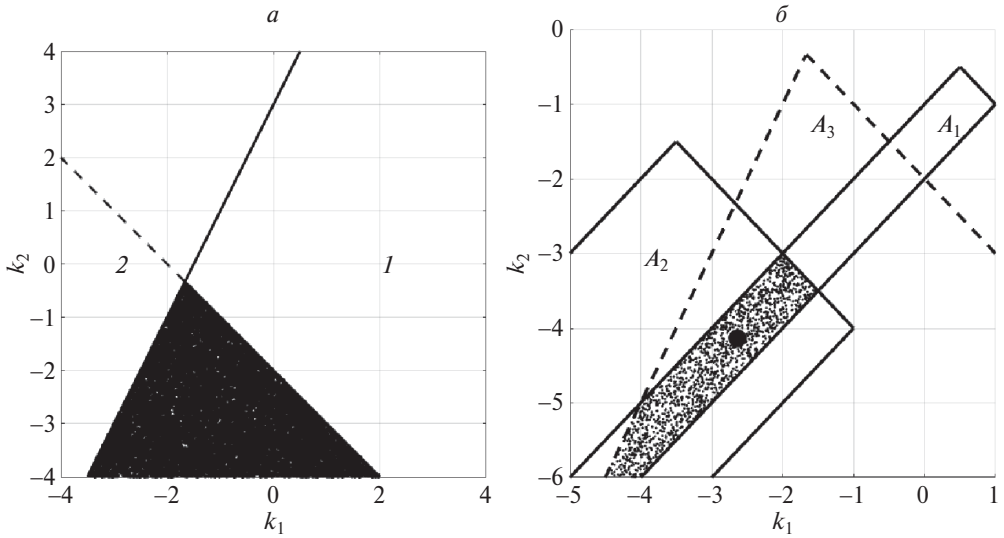


Рис. 1. *a* – Границы  $D$ -разбиения для матрицы  $A_3$ ; *б* – Результаты решения задачи (15): найденный регулятор показан крупной черной точкой.

Переходя к форме ограничений, использованной в (15), получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= [-2 \ 1]^\top, & z_1 &= -3, \\ c_2 &= [1 \ 1]^\top, & z_2 &= 2, \end{aligned}$$

где для простоты опущен верхний индекс  $\phi$ , так как  $A_\phi$  состоит всего из одной матрицы.

Рисунок 1,*a* иллюстрирует применение описанной техники к матрице  $A_3$ : в пространстве коэффициентов регулятора  $(k_1, k_2)$  сплошной линией изображена прямая, задаваемая  $2k_1 - k_2 + 3 = 0$ , а пунктирной показана прямая  $k_1 + k_2 + 2 = 0$  (видимая ее часть не является границей, т.е. цифрой 2 обозначена вся полуплоскость «слева» от сплошной прямой!). Закрашена искомая область стабилизирующих регуляторов  $k$ , а цифрами 1 и 2 обозначены оставшиеся области в порядке, указанном после (14): в первой оба собственных значения матрицы замкнутой системы неустойчивы ( $\text{Re}\{\lambda_{1,2}(M_3)\} > 0$ ), а во второй неустойчиво только одно из них ( $\text{Re}\{\lambda_1(M_3)\} < 0, \text{Re}\{\lambda_2(M_3)\} > 0$ ).

На последнем этапе решения задачи 1 производится формирование и численное решение задачи линейного программирования (15) с помощью подходящего программного обеспечения (в настоящей статье использовался MATLAB с пакетом `svx`).

В результате синтеза найден регулятор:

$$(17) \quad k^\top = [-2,635 \ -4,135],$$

при котором матрицы  $M_1$  и  $M_2$  – сверхустойчивые со степенью сверхустойчивости  $\sigma = 0,5 > 0$ , а матрица  $M_3$  – устойчивая. Следовательно, задача одновременной стабилизации решена.



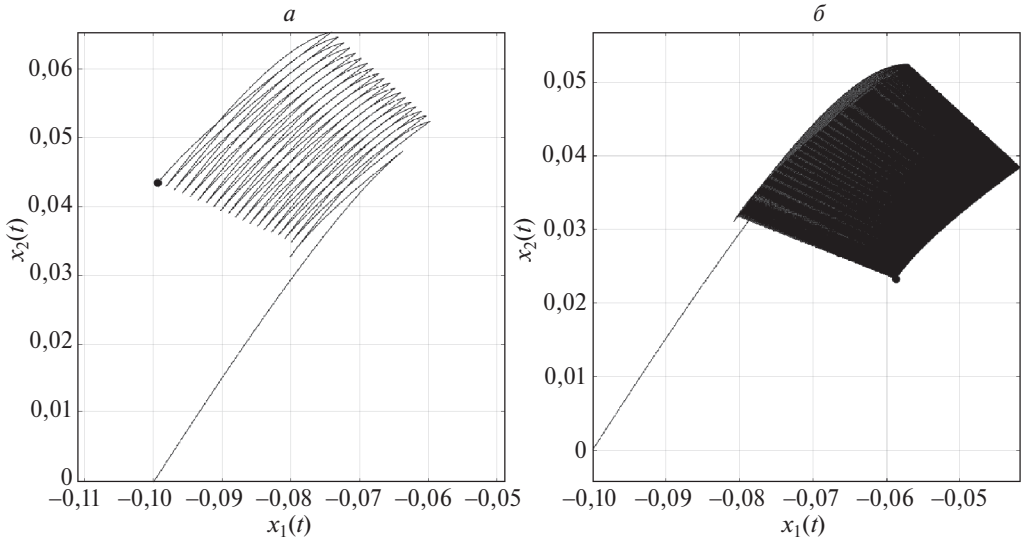


Рис. 2. Фазовые портрет системы (9), (16), (17) при  $x(0) = [-0,1 \ 0]^T$  и временами простоя:  $a - t_d = 0,2$  с и  $b - t_d = 0,255$  с.

На рис. 1,б проиллюстрирована процедура синтеза: сплошными линиями изображены границы множеств сверхстабилизирующих регуляторов для матриц  $A_1$  и  $A_2$ , полученные из анализа неравенств  $-m_{ii}^\psi > |m_{ij}^\psi|$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ ,  $\psi = 1, 2$ , а пунктирной линией – границы множества стабилизирующих регуляторов для матрицы  $A_3$ . Крупной черной точкой показано найденное численно решение, а мелкими точками вокруг выделена область, содержащая регуляторы, которые удовлетворяют ограничениям в соответствующей задаче (15).

Система (9) с матрицами (16) и регулятором (17) не обладает свойством экспоненциальной устойчивости при произвольном законе переключений  $\rho(t)$ . На рис. 2,а показана траектория системы (9), (16), (17) при  $x(0) = [-0,1 \ 0]^T$  и сигнале  $\rho(t)$ , который меняет активную матрицу через интервал времени  $t_d = 0,2$  с, причем переключения производятся только между матрицами  $A_1$  и  $A_3$  (или соответственно только между  $M_1$  и  $M_3$  замкнутой системы). В этом случае траектория системы не ограничена ( $\|x(t)\|_\infty \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

С использованием описанного алгоритма [25] найдена оценка времени простоя  $t_d = 0,254$  с. На рис. 2,б показан фазовый портрет системы при условиях, аналогичных рис. 2,а, но с временем простоя  $t_d = 0,255$  с, из которого видно, что траектория системы сходится к нулю с течением времени.

Отметим, что численная проверка с помощью подхода к одновременной стабилизации, описанного в [7, 20], показала, что для матриц  $A$  при синтезе статического регулятора по состоянию соответствующее линейное матричное неравенство, гарантирующее существование общей квадратичной функции Ляпунова, неразрешимо.

## 6. Заключение

В работе предложен подход к решению задачи одновременной стабилизации линейных систем второго порядка статическим регулятором по состоянию, который является модификацией известного метода синтеза переключаемых систем на основе сверхустойчивости. Процедура синтеза регулятора, как и в исходном методе, сводится к решению специальной задачи линейного программирования. Приведен алгоритм синтеза и краткий анализ свойств найденного регулятора с точки зрения устойчивости переключаемой системы. Предложенная процедура синтеза проиллюстрирована численным примером.

Новая процедура расширяет класс решаемых задач на матрицы, не приводимые к сверхустойчивости, ценою потери заведомой экспоненциальной устойчивости переключаемой системы (она сохраняется только для подмножества сверхустойчивых подсистем). Описана частичная компенсация этого недостатка ограничением частоты переключений, осуществляемая через оценку минимального времени простоя известным методом.

Развитием данного подхода может служить попытка учета времени простоя в процедуре синтеза. В качестве предельного случая можно вообще отказаться от сверхустойчивости и формулировать задачу о поиске оптимального по времени простоя статического регулятора на множестве одновременно стабилизирующих регуляторов, найденном с помощью описанной процедуры  $D$ -разбиения.

Другой задачей дальнейших исследований является анализ классов, «аналогичных» сверхустойчивости, заведомо гарантирующих существование общей функции Ляпунова у матриц переключаемой системы, но более широких. Наиболее очевидным кандидатом в этом направлении видятся диагонально устойчивые матрицы, подмножеством которых являются сверхустойчивые.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petersen I.R.* A Procedure for Simultaneously Stabilizing a Collection of Single Input Linear Systems Using Non-linear State Feedback Control // *Automatica*. 1987. V. 23. No. 1. P. 33–40.
2. *Boyd S.P., Balakrishnan V., Feron E., El Ghaoui L.* Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities // *Proc. ACC*. 1993. P. 2147–2154.
3. *Paskota M., Sreeram V., Teo K.L., Mees A.I.* Optimal Simultaneous Stabilization of Linear Single-Input Systems via Linear State Feedback Control // *Int. J. Control*. 1994. V. 60. No. 4. P. 483–498.
4. *Blondel V.* Simultaneous Stabilization of Linear Systems. London: Springer, 1995.
5. *Lam J., Cao Y.-Y.* Simultaneous Linear-Quadratic Optimal Control Design via Static Output Feedback // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 1999. V. 9. P. 551–558.
6. *Saadatjoo F., Derhami V., Karbassi S.M.* Simultaneous Control of Linear Systems by State Feedback // *Comput. Math. Appl.* 2009. V. 58. P. 154–160.

7. *Boyd S.P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
8. *Lieberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhauser, 2003.
9. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // *Trans. Autom. Control.* 2009. V. 52, No. 2. P. 308–302.
10. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии операторных возмущений // *Дифференциальные уравнения.* 2014. Т. 50. № 7. С. 865–876.
11. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // *Дифференциальные уравнения.* 2015. Т. 51. № 11. С. 1522–1533.
12. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // *АиТ.* 2002. № 8. С. 37–53.  
*Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Superstable Linear Control Systems. I. Analysis // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 8. P. 1239–1254.
13. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // *АиТ.* 2002. № 11. С. 56–75.  
*Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Superstable Linear Control Systems. II. Design // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 11. P. 1745–1763.
14. *Talagaev Y.V.* State Estimation and Stabilization of Continuous-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Constraints of Positiveness and Superstability // *Proc. of 2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE).* 2017. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2017.8015437>
15. *Ильин А.В., Крылов П.А., Фурсов А.С.* О некотором подходе к задаче стабилизации параметрически неопределенной линейной нестационарной системы // *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.* 2020. Т. 494. С. 97–104.
16. *Щеглова А.А.* К вопросу о сверхустойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений // *АиТ.* 2021. № 2. С. 55–70.  
*Shcheglova A.A.* On the Superstability of an Interval Family of Differential-Algebraic Equations // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 2. P. 232–244.
17. *Borawski K.* State-Feedback Control in Descriptor Discrete-Time Fractional-Order Linear Systems: A Superstability-Based Approach // *Appl. Sci.* 2021. No. 11. 10568.
18. *Ibeas A.* Superstability of Linear Switched Systems // *Int. J. Syst. Sci.* 2014. V. 45. I. 11. P. 2402–2410.
19. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода  $D$ -разбиения // *АиТ.* 2008. № 12. С. 3–40.  
*Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A.*  $D$ -decomposition technique state-of-the-art // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
20. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
21. *Shorten R., Narendra K.S.* Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Common Quadratic Lyapunov Function for a Finite Number of Stable Second Order Linear Time-invariant Systems // *Int. J. Adapt. Control Signal Proc.* 2003. V. 16. No. 10. P. 709–728.

22. *Balde M., Boscain U., Mason P.* A Note on Stability Conditions for Planar Switched Systems // *Int. J. Control.* 2009. V. 82. No. 10. P. 1882–1888.
23. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
24. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Минимизация нормы матрицы обратной связи в задачах модального управления // *АиТ.* 2014. № 2. С. 72–105.  
*Kochetkov S.A., Utkin V.A.* Minimizing the feedback matrix norm in modal control problems // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 2. P. 234–262.
25. *Geromel J.C., Colaneri P.* Stability and Stabilization of Continuous-Time Switched Systems // *SIAM J. Control. Optim.* 2006. V. 45. I. 5. P. 1915–1930.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. П.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук (cavour118@mail.ru),  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Московский физико-технический институт, Долгопрудный)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА ВСПЛЕСКА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ<sup>1</sup>

Рассматривается класс хорошо известных из литературы трехчленных линейных разностных уравнений высокого порядка и исследуется неасимптотическое поведение их решений при ненулевых начальных условиях из единичного куба. Показано, что для некоторых подмножеств коэффициентов из области устойчивости всегда найдутся начальные условия, приводящие к *всплеску* – большому отклонению решений от положения равновесия, и что эти отклонения могут быть сколь угодно велики. Исследованы разнообразные частные случаи, приводятся примеры.

*Ключевые слова:* трехчленное разностное уравнение, устойчивость, ненулевые начальные условия, всплеск решений.

DOI: 10.31857/S0005231024060047, EDN: XXDFHU

### 1. Введение

Сравнительно недавно в литературе наблюдается интерес к изучению и пониманию явления *всплеска решений* устойчивых дифференциальных или разностных уравнений, вызванного наличием ненулевых начальных условий при отсутствии внешних возмущений. Под всплеском понимается большие отклонения решений от положения равновесия на конечных интервалах времени. Важность таких исследований объясняется многими причинами. Очевидно, что такое поведение крайне нежелательно в инженерной практике [1, 2] и может привести к нештатной работе или поломке цифровых систем управления. Далее, если при исследовании нелинейной системы в окрестности точки равновесия используется ее линеаризованная модель, то вследствие больших отклонений траектория может выйти из области притяжения нелинейной системы, и модель потеряет адекватность. Наконец, некоторые современные мощные методы оптимизации могут выказывать немонотонную сходимостью, затрудняющую их анализ, и это явление требует объяснения; из самых свежих публикаций на эту тему отметим [3].

Около десяти лет назад этим направлением исследований живо заинтересовался Борис Теодорович Поляк, и с тех пор им было написано много

---

<sup>1</sup> Результаты исследований, представленные в разделах 3.2.2–3.2.6, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 21-71-30005, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>).

Автор признателен В.Н. Честнову и Д.В. Шатову за ценные указания по улучшению качества представления материала.

статей по данной тематике; из наиболее значимых работ приведем [3–8], которые посвящены изучению всплеска как в непрерывном времени (дифференциальные уравнения), так и в дискретном (разностные уравнения). Этим интересом Борис Теодорович заразил многих своих учеников, в том числе и автора настоящей статьи, в которой исследуется эффект всплеска решений одного класса разностных уравнений.

В то время как случай *непрерывного времени* до определенной степени изучен в литературе (например, см. [5] с обширной библиографией, включающей ключевую работу [9]), *разностным уравнениям* уделено очень мало внимания. В литературе имеется немного разрозненных результатов, относящихся к многомерным дискретным системам и численному построению верхних оценок отклонений их решений [10, 11]; к адаптивному управлению [12]; к изучению зависимости величины всплеска от степени управляемости системы [13]. Однако насколько известно автору, простейшая и естественная постановка задачи – оценивание всплеска решений скалярных разностных уравнений – почти не исследовалась. Вероятно, первая серьезная попытка в этом направлении была предпринята в [6], где были получены точные значения или нижние оценки величины всплеска для классов расположения корней характеристического полинома уравнения и различных начальных условий и рассмотрено поведение решений также и при ненулевом детерминированном внешнем возмущении. Использувавшиеся теория и методы разностных уравнений изложены в [14].

Отметим еще одно интересное направление исследований – развитие вероятностного подхода к оценке всплеска, в рамках которого коэффициенты и/или начальные условия устойчивого разностного уравнения предполагаются случайными, и делается попытка оценить вероятность наличия всплеска, величину его математического ожидания и т.д.; см. [8, 15].

В данной работе изучается явление всплеска применительно к трехчленному уравнению, характерному для задач популяционной динамики при использовании линеаризованных моделей. Первой примечательной статьей, изучавшей это уравнения, является [16] (на сегодняшний день эта работа имеет 267 цитирований в библиографической базе данных Google Scholar), где были получены необходимые и достаточные условия его асимптотической устойчивости в терминах коэффициентов уравнения; а именно, было дано явное описание области устойчивости на плоскости двух его коэффициентов.

Позже эти результаты были обобщены в сторону наличия нескольких запаздываний [17, 18], комплекснозначных коэффициентов [19], векторных уравнений [20, 21], нахождения альтернативных доказательств формы области устойчивости [18], приложений к непрерывным системам с запаздываниями [22] и др.; также отметим [14], где приведены поучительные обсуждения.

Удобной чертой решения изучаемого уравнения является то, что, имея всего три ненулевых члена, оно выказывает большое разнообразие типов поведения при различных начальных условиях и значениях двух варьируемых

коэффициентов. Кроме того, наличие всего двух коэффициентов облегчает анализ поведения решений именно в терминах коэффициентов, а не корней.

Первые результаты по изучению эффектов всплеска в этом уравнении были получены в [6]; здесь эта линия исследований продолжена и предприняты попытки получить точные аналитические выражения для величины всплеска или ее нижние оценки. В ряде специальных случаев показано, что всплеск неизбежен, а его величина (равно как и момент) могут принимать сколь угодно большие значения.

В статье приняты стандартные обозначения:  $\mathbb{R}^n$  – поле вещественных чисел; значок  $\gg$  означает «много больше»; символ  $\approx$  означает «приблизительно равно»; символ  $:=$  соответствует «обозначим через»; символы  $\lfloor \cdot \rfloor$  и  $\lceil \cdot \rceil$  означают округление до ближайшего целого вниз и вверх соответственно;  $|\cdot|$  – абсолютная величина числа;  $\lambda_i$  –  $i$ -й корень уравнения;  $e$  – основание натурального логарифма; для целых  $s \geq t$  биномиальный коэффициент обозначается через  $C_s^t = \frac{s!}{t!(s-t)!}$ .

## 2. Определения, обозначения, постановка задачи

Рассматриваем следующее скалярное линейное однородное трехчленное разностное уравнение степени  $n + 1$ :

$$(1) \quad x_{k+1} - ax_k + bx_{k-n} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

с вещественными коэффициентами  $a, b$ ; его характеристический многочлен имеет вид

$$p(\lambda) = \lambda^{n+1} - a\lambda^n + b.$$

Предполагается, что начальные условия  $x^{(0)} = (x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  имеют единичную норму:  $\|x^{(0)}\|_\infty = 1$ . Такое допущение не ограничивает общности, поскольку решение зависит линейно от  $x^{(0)}$ .

Рассматриваем лишь асимптотически устойчивые уравнения (1), т.е. те, для корней  $\lambda_i$  которых выполнено  $|\lambda_i| < 1$ . Обозначим через  $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{R}^2$  область устойчивости уравнения (1) на плоскости коэффициентов; ясно, что оно непусто. Для  $(a, b) \in \mathcal{S}_n$  решения асимптотически стремятся к нулю; интерес представляет исследование поведения решений при конечных значениях  $k$ .

Для данных  $(a, b) \in \mathcal{S}_n$  и данного  $x^{(0)}$ , через

$$\varkappa(a, b, x^{(0)}) = \max_{k \geq 1} |x_k|$$

обозначим максимальное значение решения уравнения (траектории). Там, где это не допускает разночтений, опускаем аргументы у  $\varkappa(a, b, x^{(0)})$ . Говорим, что решение *испытывает всплеск*, если эта величина больше единицы, а соответствующее значение номера итерации  $k^* = \arg \max_k |x_k|$  называем *моментом всплеска*.

Также будем оценивать *область всплеска* – ту часть  $\mathcal{P}_n$  области устойчивости  $\mathcal{S}_n$ , в которой может наблюдаться всплеск хотя бы при каких-то начальных условиях. Области всплеска для некоторых конкретных начальных условий также представляют интерес.

Впервые линеаризованная модель (1) была предложена в [23]; входящие величины имеют следующий физический смысл:  $k$  – год наблюдения за популяцией,  $x_k$  – изменение размера популяции в  $k$ -м году,  $n$  – репродуктивный возраст особей в популяции,  $a$  – коэффициент выживаемости,  $b$  – пополнение популяции за счет рождаемости. Те или иные начальные условия отвечают размерам популяции в  $n$  лет, предшествующих началу наблюдения за популяцией с использованием данной модели.

Устойчивость уравнения соответствует неизменности размера популяции во времени, а всплеск решений означает аномально большой текущий прирост/убыль. И то, и другое нежелательно с точки зрения экологического равновесия.

### 3. Основные результаты

#### 3.1. Области устойчивости и всплеска на плоскости коэффициентов уравнения (1)

На рис. 1 показан вид области устойчивости уравнения (1) на плоскости коэффициентов (см. [16, 18]).

Нетрудно показать, что для значений коэффициентов в *области Кона*  $\mathcal{C} = \{a, b: |a| + |b| < 1\}$  (пунктирная линия) всплеска нет ни при каких начальных условиях. Нас будут интересовать лишь области, составленные из множеств I и II («крылышки»), для каждой точки которых имеем  $|a| + |b| \geq 1$  и такие начальные условия, дающие всплеск, существуют (см. теорему 1 из [15]).

Для площади области всплеска  $\mathcal{P}_n$  имеем простую верхнюю оценку. Действительно, из уравнений границы области  $\mathcal{S}_n$  (см. [16]) видно, что правое

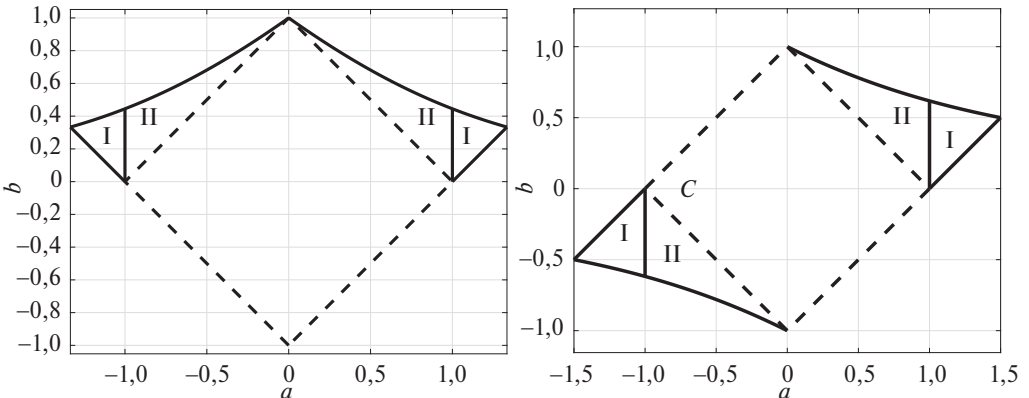


Рис. 1. Область устойчивости  $\mathcal{S}_n$  уравнения (1) для  $n = 3$  (слева) и  $n = 2$  (справа).



крылышко лежит в треугольнике с вершинами  $(0, 1)$ ;  $(1 + 1/n, 1/n)$ ;  $(1, 0)$ ; его площадь равна  $1/n$ , как и площадь левого крылышка, а поскольку  $\mathbf{Vol}(\mathcal{C}) = 2$ , то получаем

$$\mathbf{Vol}(\mathcal{P}_n) < \frac{1}{n+1} \mathbf{Vol}(\mathcal{S}_n)$$

для  $n > 1$  (при  $n = 1$  в оценке выше имеется равенство). В силу симметрии (см. рис. 1) это справедливо и для четных значений  $n$ . Таким образом, для уравнений (1) «вероятность» всплеска убывает с ростом порядка (так, уже при  $n = 7$  имеем  $\mathbf{Vol}(\mathcal{P}_n) \approx 0,08 \times \mathbf{Vol}(\mathcal{S}_n)$ ), но в дальнейшем увидим, что *величина всплеска* может принимать сколь угодно большие значения. Отметим, что для устойчивых уравнений общего вида наблюдается ровно обратная картина: с ростом размерности всплеск становится типичным явлением (см. [15]).

### 3.2. Величина всплеска при «стандартных» начальных условиях

Обратимся к оцениванию *величины* всплеска. При известных степени  $n$ , коэффициентах  $(a, b) \in \mathcal{P}_n$  и начальных условиях  $x^{(0)}$  численное значение решения  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  может быть найдено прямыми вычислениями. Однако желательно иметь *аналитические выражения* для величины всплеска. В общем случае это представляется затруднительным, и ниже будут даны оценки величины и момента всплеска для специальных начальных условий и некоторых классов коэффициентов.

Далее будем изучать поведение решений при «стандартных» начальных условиях

$$(2) \quad x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1).$$

**3.2.1. Нижняя оценка.** При  $x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$  из (1) немедленно получаем, что первые  $n$  итераций  $x_k$  не зависят от  $b$ :

$$(3) \quad x_k = a^k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

т.е. всплеск наблюдается для всех  $(a, b) \in \mathcal{S}_n$ ,  $|a| > 1$ ; иными словами, множества I представляют собой области всплеска при  $x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$ . Величина всплеска может быть оценена снизу как

$$(4) \quad \varkappa \geq \varkappa_* = |a|^n > 1.$$

Впрочем, нетрудно видеть, что эта оценка может оказаться очень грубой.

*Пример 1.* При  $n = 10$  и  $\varepsilon = 0,001$  рассмотрим пару коэффициентов  $a = \frac{n+1}{n} - \varepsilon = 1,099$  и  $b = \frac{1}{n} = 0,1$ . Имеем  $\varkappa_* = 2,5703$ , в то время как истинное значение величины всплеска, полученное прямыми вычислениями, дает  $\varkappa = 13,0732$ , и оно достигается при  $k = 111 \gg n$ .

**3.2.2. Точная комбинаторная формула.** Итак, для начальных значений  $x^{(0)}$  (2) имеем

$$x_k = a^k := X_{k,0}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Продолжим итерировать по  $k$ . На следующих  $(n + 1)$  шагах величина  $x_k$  зависит также и от коэффициента  $b$ , и прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} x_k &= X_{k,0} - C_{k-n}^1 a^{k-(n+1)} b \\ &:= X_{k,0} - X_{k,1} \\ &\quad \text{для } n + 1 \leq k \leq 2(n + 1) - 1, \end{aligned}$$

где зависящий от коэффициента  $b$  член  $C_{k-n}^1 a^{k-(n+1)} b$  обозначен через  $X_{k,1}$ .

На третьем цикле из  $(n + 1)$  итераций решение также зависит и от  $b^2$ :

$$\begin{aligned} x_k &= X_{k,0} - X_{k,1} + C_{k-2n}^2 a^{k-2(n+1)} b^2 \\ &:= X_{k,0} - X_{k,1} + X_{k,2} \\ &\quad \text{для } 2(n + 1) \leq k \leq 3(n + 1) - 1, \end{aligned}$$

где слагаемое  $C_{k-2n}^2 a^{k-2(n+1)} b^2$ , зависящее от  $b^2$ , обозначено через  $X_{k,2}$ .

Продолжая итерировать и собирая вместе полученные выражения, приходим к следующему результату.

*Утверждение 1.* Решение  $x_k$  уравнения (1) при начальных условиях (2) имеет вид

$$(5) \quad x_k = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(n+1) \rfloor} (-1)^j C_{k-jn}^j a^{k-j(n+1)} b^j, \quad k = 0, 1, \dots$$

Полученное выражение представляет собой точное решение уравнения (1), (2), однако оно вряд ли может быть полезным для оценки величины и момента всплеска.

**3.2.3. Параметрическое семейство уравнений (1).** Следуя [6], рассмотрим следующее семейство коэффициентов:

$$(6) \quad a = 1 + \frac{\alpha}{n}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad b = a^{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}},$$

где  $\alpha$  – параметр. В [6] показано, что максимальный по абсолютной величине корень уравнения (1), (6) равен

$$\rho = \frac{an}{n+1} = \frac{n+\alpha}{n+1}$$

и он имеет кратность два.

Из уравнения границы области  $\mathcal{S}_n$  (например, см. теорему 5.3 из [14]) следует, что точка  $(a, b)$  (6) принадлежит множеству I (правое «крылышко»; анализ левого крылышка аналогичен в виду симметрии). На рис. 2 этому параметрическому семейству соответствует точечная кривая.

Анализ поведения решений такого семейства проще по сравнению с общим случаем; в [6] рассматривались специального вида начальные условия,

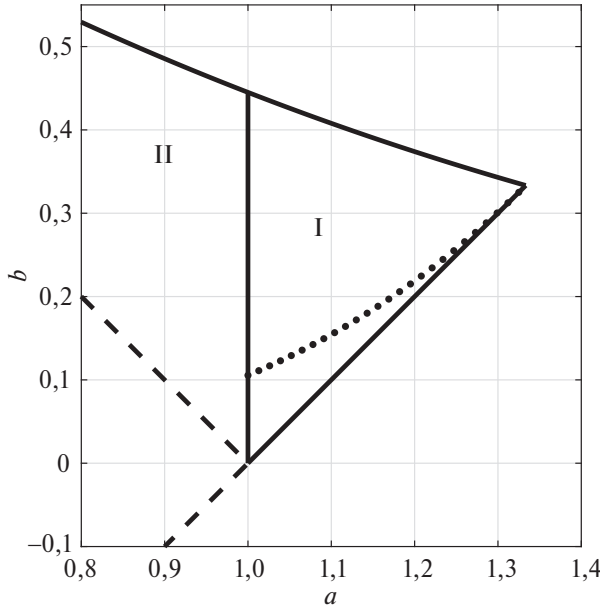


Рис. 2. Параметрическое семейство (6) коэффициентов уравнения (1).

для которых удалось выписать явный вид решения уравнения (1) и получить аналитическое выражение для величины и момента всплеска. Здесь рассмотрим «стандартные» начальные условия (2).

Изучим сперва простейший случай  $n = 1$ , т.е. уравнение второго порядка. Из (6) имеем

$$a = 1 + \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad b = a^2/4,$$

так что корни характеристического уравнения равны  $\lambda_1 = \lambda_2 = \rho = \frac{a}{2} < 1$ . Для начальных условий  $x_{-1} = 0$ ,  $x_0 = 1$  немедленно получаем

$$(7) \quad x_k = (k + 1)\rho^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

и величину всплеска легко оценить. Для момента всплеска получаем

$$k^* = \max\{k: x_{k-1} < x_k\}$$

и, дифференцируя по  $k$ , приходим к

$$(8) \quad k^* = \left\lfloor \frac{\rho}{1 - \rho} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right\rfloor.$$

Подставляя  $k = k^*$  в (7), для величины всплеска получаем нижнюю оценку

$$x > \left( \frac{\rho}{1 - \rho} + 1 \right) \rho^{\frac{\rho}{1 - \rho}} > \frac{2}{(1 - \alpha)e}.$$

Таким образом, из последних двух формул следует, что даже для уравнения второго порядка ( $n = 1$ ) и момент, и величина всплеска могут принимать

сколь угодно большие значения при  $\alpha \rightarrow 1$ , т.е. при приближении к границе области устойчивости.

**3.2.4. Еще о консерватизме оценки** (4). Рассмотрим теперь общий случай  $n > 1$ . Как было отмечено выше, на первых  $n$  итерациях решение имеет вид (3). Оно монотонно возрастает при всех допустимых значениях  $a$ , и величина  $\varkappa_* = a^n$  может быть принята в качестве нижней оценки всплеска. Можно показать, что при рассматриваемых начальных условиях  $x^{(0)}$  и  $a, b$  вида (6) решение  $x_k$  унимодально, поэтому величина всплеска равна  $x_n = a^n$  тогда и только тогда, когда  $x_n > x_{n+1} = a^{n+1} - b$ . С учетом выражения для  $b$  (6) получаем, что при

$$1 < \alpha \leq \alpha_1 = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1} - n^n} \approx \frac{1}{e},$$

величина всплеска дается выражением  $\varkappa_1 = (1 + \alpha/n)^n \approx e^\alpha$ , а при  $\alpha > \alpha_1$  всплеск больше.

*Пример 2.* Для  $n = 10$  имеем  $\alpha_1 = 0,3232$ , и  $\varkappa_* = 1,3745$  дает точное значение величины всплеска при всех  $\alpha \leq \alpha_1$ . Однако при  $\alpha = 0,9$  истинное значение всплеска равно  $\varkappa = 7,5965 \gg \varkappa_* = a^n = 2,3674$ , и оно достигается на шаге  $k = 106 \gg n$ . Для сравнения, величина всплеска при (предположительно наихудших) начальных условиях  $x^{(0)} = (-1, \dots, -1, 1)$  равна  $\varkappa = 14,4601$ .

Таким образом, как и для коэффициентов  $a, b$  общего вида, оценка  $\varkappa_*$  всплеска может оказаться очень грубой, если  $\alpha > \alpha_1$ . Ниже будет получена гораздо более точная оценка.

**3.2.5. Аналитическая нижняя оценка.** Имея в виду формулу (7), индукцией по  $n$  получаем следующий результат.

*Утверждение 2.* Для всех  $k \geq 1$  решение семейства (1) с коэффициентами (6) и начальными условиями  $x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$  ограничено снизу величиной

$$(9) \quad x_k \geq y_k = \frac{2}{n+1}(k+1)\rho^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

При больших  $k$  эта оценка представляет собой асимптотику для решений  $x_k$ .

Момент всплеска  $k_y^{*}$  последовательности  $y_k$  может быть принят за оценку истинного момента всплеска  $k^*$ :

$$(10) \quad k^* \approx k_y^* = \left\lfloor \frac{\rho}{1-\rho} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+\alpha}{1-\alpha} \right\rfloor.$$

Соответственно подставляя правую часть (10) в (9), получаем следующую оценку  $\widehat{\varkappa}_y$  величины всплеска решения  $x_k$ :

$$(11) \quad \varkappa \geq \widehat{\varkappa}_y \approx \frac{2}{(1-\alpha)e} \frac{n+1}{n+\alpha}.$$

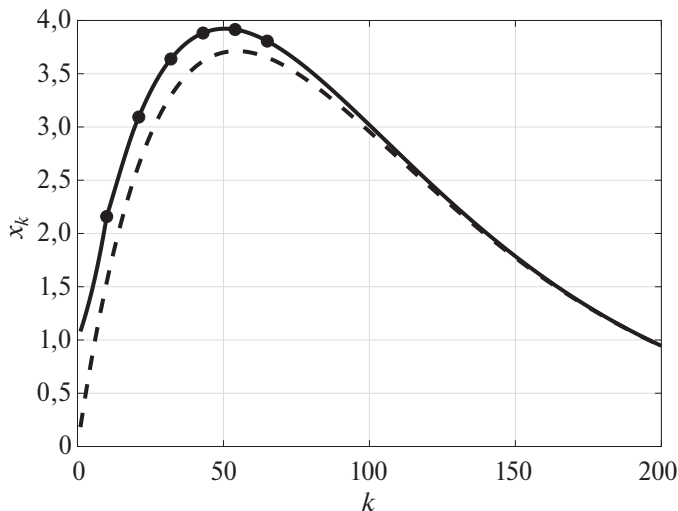


Рис. 3. Истинная траектория  $x_k$  (верхняя кривая) для  $n = 10$ ,  $\alpha = 0,8$ ; значения на концах первых 6 циклов (жирные точки); значения  $y_k$  (нижняя кривая).

Из формул (10) и (11) вытекает интересное наблюдение. Увеличение порядка  $n$  уравнения при фиксированном  $\alpha$  ведет к росту значения момента всплеска, в то время как сама величина всплеска меняется очень мало. С другой стороны, при фиксированном  $n$  увеличение  $\alpha$  влечет рост обеих величин. Это картина отличается от той, которая наблюдается для уравнений общего типа, в которых, как правило, обе эти величины растут с ростом порядка уравнения и приближении коэффициентов к границе области устойчивости (см. результаты в [6]).

*Пример 3.* На рис. 3 верхняя кривая соответствует решению  $x_k$  при  $n = 10$ ,  $\alpha = 0,8$  (также показаны значения на концах циклов длины  $(n + 1)$ , обсуждавшихся в разделе 3.2.2, а нижняя — оценке  $y_k$ .

Истинное значение всплеска равно  $\varkappa = 3,9227$ , и он достигается на шаге  $k^* = 51$ . Оценки (11) и (10) дают  $\hat{\varkappa}_y = 3,7469$  и  $k_y^* = 54$ ; относительная ошибка оценки величины всплеска составляет 4,7%.

При том же значении  $\alpha = 0,8$ , но более высоком порядке уравнения  $n = 20$  получаем примерно то же значение  $\varkappa = 3,9274$  для величины всплеска, но гораздо большее значение  $k^* = 97$  момента всплеска. Наблюдающееся различие с предыдущим случаем объясняется полученными выше выражениями (11) и (10).

С другой стороны, для того же  $n = 10$ , но при гораздо большем значении параметра  $\alpha = 0,95$ , оценки дают  $\hat{\varkappa}_y = 14,7824$  и  $k_y^* = 218$ , в то время как истинное значение всплеска  $x_k$  равно  $\varkappa = 10,7483$ , и он достигается при  $k^* = 153$ . Таким образом, и момент, и величина всплеска выросли значительно. Относительная ошибка оценки составляет чуть более 1%. Результаты представлены на рис. 4.

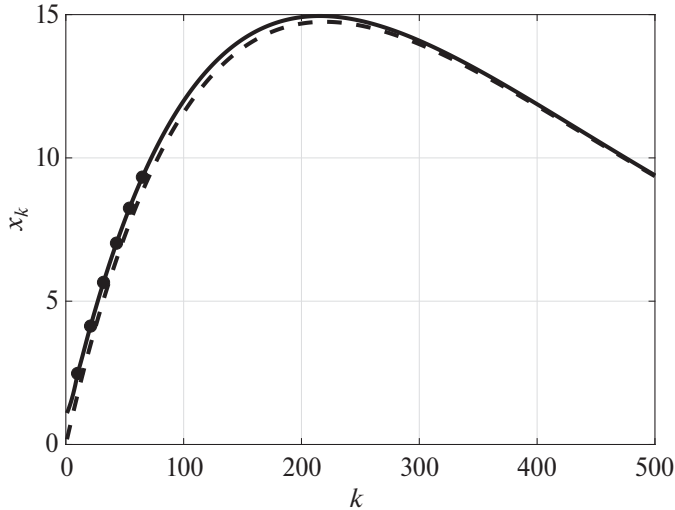


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но при  $\alpha = 0,95$ .

Таким образом, точность оценки (9) растет с приближением значения  $\alpha$  к единице, а это как раз тот случай, когда всплеск наблюдается на далеких итерациях  $k$  и применение общей формулы (5) требует определенных усилий.

**3.2.6. Другое параметрическое семейство.** Коротко обсудим еще одно параметрическое семейство уравнений (1), задаваемое соотношениями

$$a = 1 + \frac{1}{n} - \varepsilon, \quad b = \frac{1}{n}$$

с  $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$  и начальными условиями (2). При малых  $\varepsilon$  допустимая точка  $(a, b)$  лежит близко от правого угла области  $\mathcal{S}_n$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  (и фиксированном  $n$ ) величина всплеска неограниченно возрастает (поскольку максимальный по модулю корень уравнения (1) стремится к  $\rho = 1$  и имеет кратность два); это поведение типично и для уравнений общего вида (см. [6]).

Зафиксируем теперь малое значение  $\varepsilon$  и будем увеличивать порядок  $n$  уравнения. В отличие от всех случаев, рассмотренных в [6] (рост величины всплеска) здесь наблюдаем ровно противоположную картину: величина всплеска *уменьшается* до  $a^n$  с ростом  $n$ . Простое объяснение этого явления состоит в том, что точка  $(a, b)$  приближается к точке  $(1, 0)$ , которая принадлежит области  $\mathcal{C}$ , в которой всплеска нет.

**3.2.7. Угловые точки множества  $\mathcal{S}_n$ .** Для некоторых значений коэффициентов  $(a, b) \in \mathcal{S}_n$  удастся получить явный вид решения и проанализировать его поведение. Таковыми являются угловые точки области устойчивости.

Первые «тривиальные» значения:  $a = 0$ ,  $b = \pm 1$  (верхняя и нижняя угловые точки на рис. 1). Так, для  $b = 1$  корни характеристического полинома  $p(\lambda) = \lambda^{n+1} + 1$  есть корни из минус единицы. Они равномерно расположены на окружности единичного радиуса; получаем результат, который немедленно

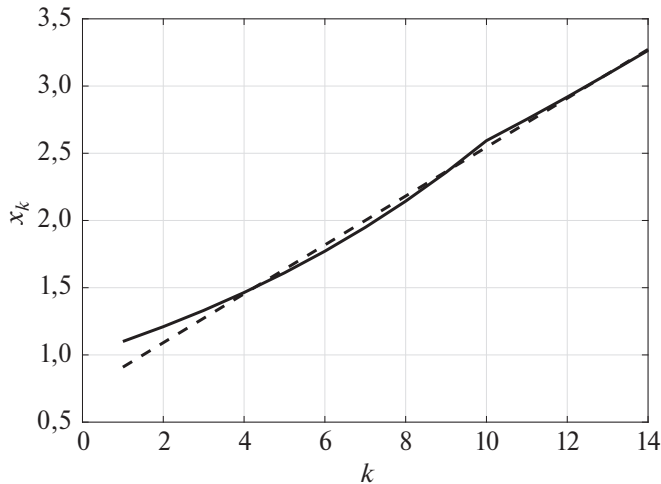


Рис. 5. Решения уравнения (1), (2),  $n = 10$  (сплошная линия) и его асимптотика (пунктир).

но следует из Утверждения 1 или же он может быть получен непосредственными вычислениями.

*Утверждение 3.* При  $a = 0$ ,  $b = 1$  решение (1), (2) имеет вид

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{при } \text{mod}(k, n) \neq 0, \\ (-1)^m & \text{при } \text{mod}(k, n) = 0. \end{cases}$$

В случае  $b = -1$  картина совершенно аналогичная, но ненулевые значения решения равны единице.

Другой, более интересной угловой точкой является  $a = \frac{n+1}{n}$ ,  $b = \frac{1}{n}$  (и ее симметричная  $a = -\frac{n+1}{n}$ ,  $b = \frac{1}{n}$ , см. рис. 1), которая принадлежит параметрическому семейству (6) с  $\alpha = 1$ . В этом случае старший корень равен  $\rho = 1$  и имеет кратность два. В отличие от предыдущего случая, решение  $x_k$  расходится, и из Утверждения 2 следует, что оно растет по крайней мере линейно с ростом  $k$ . Точнее, имеем следующий результат.

*Утверждение 4.* При  $a = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $b = \frac{1}{n}$  асимптотика решения уравнения (1), (2) дается следующим выражением:

$$x_k \sim \frac{2(k+1)}{n+1} + \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2k}{n+1} + \frac{2n+2}{3n+1}.$$

Иллюстрация для  $n = 8$  приведена на рис. 5; видно, что асимптотическая формула весьма точна и для малых значений  $k$ , а само решение очень быстро выходит на асимптотику.

**3.2.8. Иллюстративный пример.** В заключение представим численную иллюстрацию величины всплеска решений уравнения (1) с начальными условиями  $x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$  при произвольных значениях коэффициентов  $a, b \in \mathcal{P}_n$ .

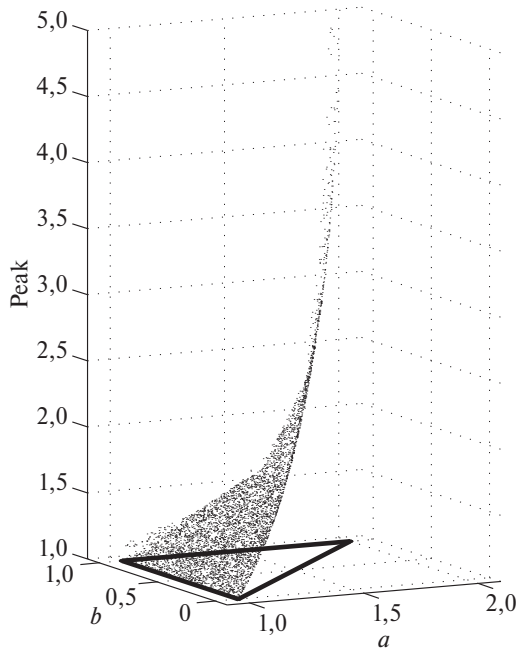


Рис. 6. Область  $\mathcal{P}_1^+$  и величина всплеска в разных ее точках.

В простейшем случае  $n = 1$  областью всплеска уравнения является треугольник  $\mathcal{P}_1^+ = \{1 < a < 2, a - 1 < b < 1\}$  на плоскости коэффициентов и симметричный ему треугольник  $\mathcal{P}_1^- = \{-2 < a < 1, a + 1 < b < 1\}$ . Как показано выше, всплеск наблюдается для всех точек из  $\mathcal{P}_1^+$  и  $\mathcal{P}_1^-$ , и его минимальное значение равно  $a$ .

Проведен следующий эксперимент. Случайным образом в области  $\mathcal{P}_1^+$  было сгенерировано  $N = 10\,000$  точек, и для каждого уравнения с коэффициентами, определяемыми координатами соответствующей точки, численно подсчитана величина всплеска. Рисунок 6 изображает область  $\mathcal{P}_1^+$  (треугольник) и значения всплеска решений соответствующих уравнений. Видим, что область больших значений всплеска невелика, и, согласно аналогичным экспериментам, ее доля уменьшается с ростом порядка  $n$ . Однако в соответствии с представленными выше результатами, *величина всплеска* может принимать сколь угодно большие значения для коэффициентов, близких к границе области  $\mathcal{P}_n^+$ .

#### 4. Заключение

В статье исследованы эффекты всплеска решений известного из литературы трехчленного разностного уравнения, имеющего прозрачное практическое происхождение. Показано, что всплеск неизбежен, если коэффициенты принадлежат определенным подмножествам области устойчивости; также показано, что момент и величина всплеска могут принимать произвольно большие



значения. Для некоторых специальных значений коэффициентов и начальных условий получены точные выражения для величины и момента всплеска или аналитические нижние оценки.

Дальнейшие исследования включают в себя анализ неасимптотического поведения решений других семейств  $(a, b) \in \mathcal{P}_n$ , в частности  $\varepsilon$ -параметризованного семейства из раздела 3.2.6, а также иных специальных уравнений, например тех, которые рассмотрены в [17]. Заслуживает внимания получение верхних оценок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования // Под ред. д-ра техн. наук, проф. В.В. Солодовникова. Кн. 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1967.
2. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
3. *Danilova M., Kulakova A., Polyak B.* Non-monotone Behavior of the Heavy Ball Method / In: Bohner M., Siegmund S., Simon Hilscher R., Stehlik P. (eds) Difference Equations and Discrete Dynamical Systems with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, V. 312. Springer, 2020. P. 213–230 (Proc. 24th International Conference on Difference Equations and Applications. Dresden, Germany, May, 2018).
4. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербakov П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // *АиТ.* 2015. № 6. С. 18–41.  
*Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V.* Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 76. No. 6. P. 957–976.
5. *Polyak B.T., Smirnov G.* Large Deviations for Non-zero Initial Conditions in Linear Systems // *Automatica.* 2016. V. 74. No. 12. P. 297–307.
6. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Smirnov G.* Peak Effects in Stable Linear Difference Equations // *J. Difference Eqs. Appl.* 2018. V. 24. No. 9. P. 1488–1502.
7. *Поляк Б.Т., Смирнов Г.В.* Переходные процессы в матричных дискретных линейных системах // *АиТ.* 2019. № 9. С. 112–121.  
*Polyak B.T., Smirnov G.V.* Transient Response in Matrix Discrete-Time Linear Systems // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 9. P. 1645–1652.
8. *Shcherbakov P., Dabbene F., Polyak B.* Solutions of Stable Difference Equations Probably Experience Peak // *IFAC-PapersOnLine.* 2020. V. 53. No. 2. P. 4762–4767 (Proc. World Congress of IFAC, Jul 11-17, 2020, Berlin).
9. *Измайлов Р.Н.* Эффект «всплеска» в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // *АиТ.* 1987. № 8. С. 56–62.  
*Izmailov R.N.* The Peak Effect in Stationary Linear Systems with Scalar Inputs and Outputs // *Autom. Remote Control.* 1987. V. 48 No. 8. P. 1018–1024.
10. *Коган М.М., Кривдина Л.Н.* Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // *АиТ.* 2011. № 7. С. 83–95.

*Kogan M.M., Krivdina L.N.* Synthesis of Multipurpose Linear Control Laws of Discrete Objects under Integral and Phase Constraints // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 7. P. 1427–1439.

11. *Агиевич В.Н., Парсегов С.Э., Щербачков П.С.* Верхние оценки всплеска в линейных дискретных системах // АиТ. 2018. № 11. С. 32–46.  
*Ahiyevich U.M., Parsegov S.E., Shcherbakov P.S.* Upper Bounds on Peaks in Discrete-Time Linear Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 11. P. 1976–1988.
12. *Delyon B., Izmailov R., Juditsky A.* The Projection Algorithm and Delay of Peaking in Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1993. V. 38. No. 4. P. 581–584.
13. *Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Pokrovskii A.V.* Transients in Quasi-controllable Systems. Overshooting, Stability and Instability // IFAC Proceedings Volumes. 1993. V. 26. No. 4. P. 871–874.
14. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. New York: Springer, 2005.
15. *Shcherbakov P., Dabbene F.* A Probabilistic Point of View on Peak Effects in Linear Difference Equations // Eur. J. Control. 2022. V. 63. P. 107–115.
16. *Kuruklis S.* The Asymptotic Stability of  $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$  // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 188. P. 719–731.
17. *Dannan F.* The Asymptotic Stability of  $x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0$  // J. Difference Eqs. Appl. 2004. V. 10. No. 6. P. 589–599.
18. *Кипнис М.М., Нигматуллин М.* Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями // АиТ. 2004. № 11. С. 25–39.  
*Kipnis M.M., Nigmatullin M.* Stability of the Trinomial Linear Difference Equations with Two Delays // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 11. P. 1710–1723.
19. *Čermák J., Jániský J.* Stability Switches in Linear Delay Difference Equations // Appl. Math. Comput. 2014. V. 243. P. 755–766.
20. *Kipnis M., Komissarova D.* Stability of a Delay Difference System // Advances in Difference Equations. 2006. Article ID 31409.  
<https://doi.org/10.1155/ADE/2006/31409>, 2006.
21. *Matsunaga H.* Exact Stability Criteria for Delay Differential and Difference Equations // Applied Math. Lett. 2007. V. 20. No. 2. P. 183–188.
22. *Patade J., Bhalekar S.* Analytical Solution of Pantograph Equation with Incommensurate Delay // Phys. Scie. Rev. 2017. V. 2. Issue 9, id. 5103.  
<https://doi.org/10.1515/psr-2016-5103>.
23. *Clark C.W.* A Delay-Recruitment Model, with an Application to Baleen Whale Population // J. Math. Biol. 1976. V. 3. P. 381–391.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. П.А. АРХИПОВ (pavel.arkhipov@ist.ac.at)  
(Институт науки и технологий (ISTA), Австрия)

## АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ЧЕБЫШЕВСКОГО ЦЕНТРА МНОЖЕСТВ, ЗАДАННЫХ ОПОРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Статья посвящена задаче оптимизации. Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклые компакты. Рассмотрим минимальное число  $t^0 > 0$  такое, что  $t^0 B$  покрывает  $A$  после сдвига на вектор  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Цель – найти  $t^0$  и  $x^0$ . В частном случае, когда  $B$  является единичным шаром с центром в нуле,  $x^0$  и  $t^0$  известны как чебышевский центр и чебышевский радиус  $A$ . В данной статье рассматривается случай, когда  $A$  и  $B$  определяются с помощью своих опорных функций. Предложен алгоритм в духе градиентного спуска Б.Т. Поляка для эффективного решения таких задач. Алгоритм имеет сверхлинейную скорость сходимости и может решать стомерные тестовые задачи за разумное время, однако для гарантии наличия сходимости необходимы некоторые дополнительные условия на  $A$  и  $B$ . Дополнительно исследовано поведение алгоритма для простого частного случая, что приводит к ряду теоретических результатов. Изучаются также возмущения этого частного случая.

*Ключевые слова:* оптимизация, чебышевский центр, градиентный спуск.

**DOI:** 10.31857/S0005231024060059, **EDN:** XXDBSM

### 1. Введение

Пусть  $A$  и  $B$  – выпуклые компакты в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $t^0 \in \mathbb{R}$  – наименьшее неотрицательное число, такое что некоторая сдвинутая копия  $t^0 B$  покрывает  $A$ ,

$$(1) \quad t^0 = \min\{t \geq 0 \mid \exists x^0 \in \mathbb{R}^n : x^0 + t^0 B \supset A\}.$$

На рис. 1 показан пример оптимальной конфигурации  $A$  и  $B$ .

Можно заметить, что та же задача имеет смысл, если  $A$  невыпукло. Действительно, если в такой задаче  $A$  заменить на ее выпуклую оболочку  $\text{conv}(A)$ , то оптимальные  $x^0$  и  $t^0$  останутся прежними. Итак, без ограничения общности можно считать, что  $A$  выпукло.

Задача нахождения чебышевского центра множества является частным случаем описанной выше задачи: если  $B = B_1(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$ , то  $x^0$  – чебышевский центр  $A$ . Известно, что ее можно быстро решить, если  $A$  конечно [4]. Но в целом подобные задачи оказываются вычислительно сложными. В последние годы им уделялось некоторое внимание. Например, задача нахождения чебышевского центра пересечения шаров NP-сложная [5]. Даже

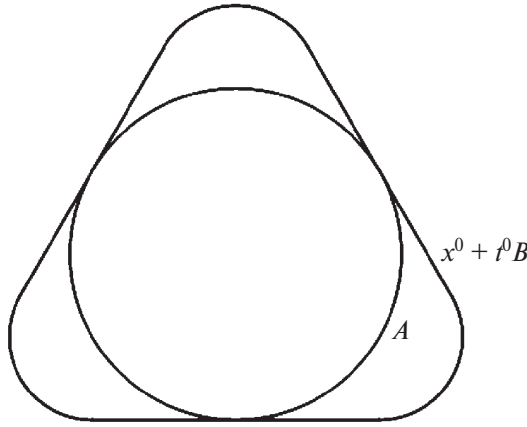


Рис. 1. Оптимальная конфигурация  $A$  и  $B$ .

вычисление чебышевского центра пересечения двух эллипсоидов является существенной проблемой [16]. У чебышевского центра есть практические применения. Он может быть полезен при решении задач долгосрочного гидротермального планирования [17], задач регрессии с шумом [18], идентификации линейных динамических систем с шумом [19], кибербезопасности [20, 22] и робототехники [21].

Рассмотрим такие задачи, в которых оптимальный  $x^0$  единственный.

Цель состоит в том, чтобы разработать алгоритм, который эффективно решает задачу, если множества  $A$  и  $B$  определены со своими опорными функциями. Напомним читателю, что для данного множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  значение опорной функции  $M$  в точке  $p \in \mathbb{R}^n$  определяется следующим образом:

$$h_M(p) = \sup\{(p, y) \mid y \in M\}.$$

В этих обозначениях

$$(2) \quad A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, p) \leq h_A(p) \forall p \in S^{n-1}\},$$

$$(3) \quad B = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, p) \leq h_B(p) \forall p \in S^{n-1}\},$$

где  $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$  – стандартная единичная сфера. Затем проблеме (1) можно переформулировать:

$$(4) \quad t^0 = \min \{t \mid \exists x^0 \in \mathbb{R}^n : (x, p) + t \cdot h_B(p) \geq h_A(p) \forall p \in S^{n-1}\}.$$

В некотором смысле это задача линейного программирования с бесконечным числом ограничений. Действительно, минимизируется линейный функционал  $(w, c) = t$ ,  $w = (t, x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $c = (1, 0, \dots, 0)^T$ , с учетом ограничений  $(w, b_p) \leq h_A(p)$ , где  $b_p = (h_B(p), p_1, \dots, p_n)^T$ , что должно выполняться для любого  $p$  единичной нормы.

Один известный подход к проблеме описан в [1]. Автор выбирает конечное число линейных ограничений, соответствующих сетке на единичной сфере, и решает задачу линейного программирования с учетом этих ограничений. Недостатком этого подхода является то, что достаточно мелкая сетка на единичной сфере большой размерности содержит слишком много элементов. На практике вычисления становятся слишком трудными при  $n > 4$ . Таким образом, разработка алгоритма, способного решить поставленную задачу в больших размерностях, является актуальной исследовательской задачей.

Прежде чем описывать алгоритм, имеет смысл напомнить читателю, что для строго выпуклого компакта  $M \subset \mathbb{R}^n$  его опорная функция имеет следующий градиент:

$$(5) \quad \nabla h_M(p) = \arg \max_{y \in M} (p, y).$$

Очевидно,  $(p, y) = h_M(p)$ . Если  $M$  выпукло, но не строго выпукло, можно рассмотреть субдифференциал  $\partial h_M(p)$ :

$$(6) \quad \partial h_M(p) = H(p) \cap M,$$

где  $H(p) = \{y \in \mathbb{R}^n | (p, y) = h_M(p)\}$ . Субдифференциалом выпуклой функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$  называется множество всех векторов  $v \in \mathbb{R}^n$  таких, что  $f(x) - f(x_0) \geq (v, x - x_0)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ . Такие векторы  $v$  называются субградиентами  $f$  в точке  $x_0$ . Легко видеть, что если  $M$  строго выпуклая, то субдифференциал ее опорной функции является одноэлементным множеством в каждой точке:

$$(7) \quad \begin{aligned} \partial h_M(p) &= H(p) \cap M = \{y \in M | (p, y) = h_M(p)\} = \\ &= \left\{ \arg \max_{y \in M} (p, y) \right\} = \{\nabla h_M(p)\}. \end{aligned}$$

Обозначим выпуклую оболочку множества  $M$  как  $\text{conv}(M)$ , а  $r$ -сильно выпуклую оболочку  $M$  как  $\text{strconv}_r(M)$ . Множество называется  $r$ -сильно выпуклым, если его можно представить в виде пересечения шаров радиуса  $r$ . Предположим,  $M \subset \mathbb{R}^n$  можно покрыть шаром радиуса  $r$ . Тогда  $\text{strconv}_r(M)$  – это пересечение всех шаров радиуса  $r$ , содержащих  $M$  (также как выпуклая оболочка  $M$  – это пересечение всех полупространств, содержащих  $M$ ).

## 2. Алгоритм и теоретические результаты

Чтобы описанный ниже алгоритм наверняка сошелся,  $A$  и  $B$  должны удовлетворять условию: функция  $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(p) = (x^0, p) + t^0 h_B(p) - h_A(p)$  должна иметь ровно  $n + 1$  локальных минимумов  $p_1^0, \dots, p_{n+1}^0$ , и выпуклая оболочка множества этих минимумов должна содержать ноль:  $0 \in \text{int}(\text{conv}(p_1^0, \dots, p_{n+1}^0))$ . Неформально, эти условия означают, что задача линейного программирования (4) имеет ровно  $n + 1$  активных ограничений.

Пусть  $p_1, \dots, p_{n+1}$  – векторы единичной длины. Будем использовать следующие обозначения:

$$(8) \quad a_i = h_A(p_i), \quad a = (a_1, \dots, a_{n+1})^T,$$

$$(9) \quad b_i = h_B(p_i), \quad b = (b_1, \dots, b_{n+1})^T,$$

$$(10) \quad M_a = \begin{pmatrix} a_1 & (p_1)_1 & \dots & (p_1)_n \\ a_2 & (p_2)_1 & \dots & (p_2)_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1} & (p_{n+1})_1 & \dots & (p_{n+1})_n \end{pmatrix},$$

$$(11) \quad M_b = \begin{pmatrix} b_1 & (p_1)_1 & \dots & (p_1)_n \\ b_2 & (p_2)_1 & \dots & (p_2)_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n+1} & (p_{n+1})_1 & \dots & (p_{n+1})_n \end{pmatrix}.$$

*Лемма 1.* Если  $0 \in \text{conv}(\{p_1, \dots, p_{n+1}\})$ , то для  $t, x$  таких, что  $(p_j, x) + th_B(p_j) \geq h_A(p_j)$  и  $t$  минимально, справедливо равенство

$$(12) \quad M_b \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a.$$

*Следствие 1.* Используя правило Крамера, имеем

$$(13) \quad t = \frac{\det M_a}{\det M_b}.$$

*Алгоритм 1.*

Начнем с точек  $p_1, \dots, p_{n+1} \in S^{n-1}$ , равных вершинам случайно повернутого правильного симплекса. На каждой итерации будем делать следующее:

1. Найдем решение системы линейных уравнений (12),  $t, x$ .
2. Заменим каждый  $p_i$  на  $p'_i$ , который является локальным минимумом функции  $f_{t,x}(p) = (x, p) + th_B(p) - h_A(p)$ , найденным с помощью градиентного спуска из начальной точки  $p_i$ . Градиент  $f_{t,x}$  можно вычислить следующим образом:

$$(14) \quad \nabla f_{t,x}(p) = x + t \arg \max_{y \in B}(p, y) - \arg \max_{y \in A}(p, y).$$

Если существует несколько глобальных максимумов  $(p, y)$ , выберем произвольный.

3. Если среди  $p'_i$  нет дубликатов, положим  $p_i$  равными  $p'_i$  и завершим эту итерацию.

В противном случае удалим дубликаты из  $\{p'_i\}$ . Пусть  $L$  – множество оставшихся минимумов  $p'_i$ .

Выполним градиентный спуск до минимума  $f_{t,x}$  начиная с (равномерно) случайного элемента единичной сферы. Если этот минимум не совпадает ни с одним элементом  $L$ , добавим его в  $L$ . Будем делать так до тех пор, пока в  $L$  не будет  $n + 1$  элементов. Затем положим  $p_i$  равными  $p'_i$  и завершим эту итерацию. Если количество выполненных попыток больше  $K$ , но еще не найдены  $n + 1$  различных минимумов, перезапустим весь алгоритм.

Остановимся, когда  $t$  и  $x$  изменяются достаточно незначительно за одну итерацию или когда количество итераций превышает некоторый предел.

Градиентный спуск описан, например, в классической книге [2].

Далее обсудим типы задач, которые можно решить с помощью алгоритма 1.

*Лемма 2. Если  $B$  строго выпуклая, то функция  $f_{t,x} = (x, p) + th_B(p) - h_A(p)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  дифференцируема в любом своем минимуме.*

В частности,  $f_{t,x}$  дифференцируема в своих минимумах для задач нахождения чебышевского центра. Дифференцируемость  $f_{t,x}$  в минимумах также может быть полезна для правильной сходимости градиентного спуска. Но существуют модификации подхода градиентного спуска, которые могут сходиться и к негладким минимумам.

*Теорема 1. Пусть  $p_1^0, \dots, p_{n+1}^0$  - минимумы  $f(p) = (x^0, p) + t^0 h_B(p) - h_A(p)$ ,  $0 \in \text{int}(\text{conv}(p_1^0, \dots, p_{n+1}^0))$ . Пусть  $B$  строго выпукла. Предположим, что для любого  $j \in \{1 \dots n + 1\}$  и для любой точки  $p$  из некоторой окрестности  $p_j^0$*

$$(15) \quad M \|p - p_j^0\|^\alpha \geq f(p) \geq \mu \|p - p_j^0\|^2,$$

где  $M, \mu, \alpha$  - константы,  $1 < \alpha \leq 2$ . Тогда в некоторой окрестности решения алгоритм (1) сходится со степенью сходимости  $\alpha$ . То есть для  $t, x$  из некоторой окрестности  $t^0, x^0$

$$(16) \quad \|(t' - t^0, x'_1 - x_1^0, \dots, x'_n - x_n^0)^T\| \leq C \|(t - t^0, x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0)^T\|^\alpha,$$

где  $t', x'$  - состояние алгоритма на следующей итерации, если текущее состояние равно  $t, x$ .

*Теорема 2. Пусть  $B = B_1(0)$ ,  $A = \text{conv}((v_1 + C_1) \cup \dots \cup (v_{n+1} + C_{n+1}))$ , где  $v_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $C_j \subset \mathbb{R}^n$  - сильно выпуклые множества с радиусом сильной выпуклости  $r < t^0$ . Также пусть  $f$  имеет хотя бы  $n + 1$  нулей. Тогда алгоритм 1 имеет квадратичную сходимость.*

### 3. Численные эксперименты

Код, который использовался для численных экспериментов, а также рисунки находятся в публичном доступе на GitHub, <https://github.com/Paul566/GraduateThesis>. Класс солвера находится в файле GradientDescentSolver.py.

Алгоритм 1 был реализован и протестирован. Во время всех тестов 15 итераций хватало, чтобы алгоритм сошелся с машинной точностью. Во всех случаях погрешность итогового результата составляла около  $10^{-14}$ – $10^{-16}$ . В большинстве случаев 5–7 итераций было достаточно.

Во всех тестах алгоритм имел следующие параметры: максимальное количество итераций: 20, параметр скорости обучения в градиентном спуске: 1, количество попыток найти  $n + 1$  минимумов:  $10n$ , максимальное количество шагов при градиентном спуске: 1000, градиентный спуск прекращается, если  $f$  изменяется менее чем на  $10^{-10}$ , два минимума считаются дубликатами, если норма их разницы меньше  $10^{-6}$ , максимальное количество перезапусков 1000. Использовался обычный градиентный спуск без модификаций. Для некоторых серий тестов будет представлен график зависимости ошибки выходных данных от времени выполнения. Вычисления проводились на CPU на обычном ноутбуке.

1. Начнем с очень простой серии тестов. Пусть  $B = B_1(0)$ ,  $A$  – случайный симплекс, содержащий центр описанной сферы. Результаты численных экспериментов для размерности 100 представлены на рис. 2. Конечно, решение подобных задач с помощью алгоритма 1 не имеет практического смысла, данная серия симуляций проводилась в целях тестирования. Как видно, даже стомерные задачи решаются за несколько секунд. Найти опорные функции в этом случае несложно:

$$(17) \quad h_B(p) = \|p\|,$$

$$(18) \quad \nabla h_B(p) = \frac{p}{\|p\|},$$

$$(19) \quad h_A(p) = \max_i (v_i, p),$$

$$(20) \quad \nabla h_A(p) = \arg \max_{v_i} (v_i, p).$$

2. Теперь перейдем к более сложной серии тестов. Пусть множество  $A$  – выпуклая оболочка  $n + 1$  эллипсоидов, а  $B$  – шар. Результаты численных экспериментов для размерности 100 представлены на рис. 3.

В этом случае на решение 100-мерной задачи алгоритму требуются десятки секунд, что примерно на порядок дольше, чем в предыдущей серии. Однако в большинстве случаев для сходимости все равно требовалось 5–7 итераций. Увеличение времени выполнения связано с усложнением вычисления опорной функции  $A$ . Действительно, для эллипсоида  $E = v + MB_1(0)$ , где  $M$  – матрица,  $v \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(21) \quad h_E(p) = (p, v) + \max_{y \in MB_1(0)} (p, y) = (p, v) + \max_{u \in B_1(0)} (p, Mu) =$$

$$(22) \quad = (p, v) + \max_{u \in B_1(0)} (M^T p, u) = (p, v) + \|M^T p\|,$$

$$(23) \quad \nabla h_E(p) = v + M \frac{M^T p}{\|M^T p\|} = v + \frac{MM^T p}{\|M^T p\|}.$$



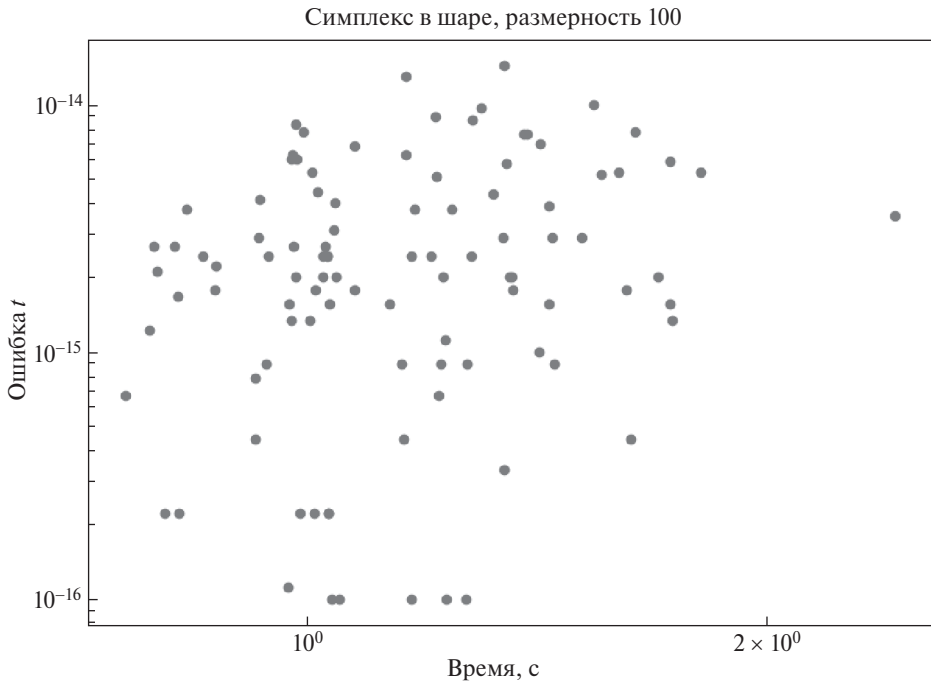


Рис. 2. Погрешность  $t$  в зависимости от времени выполнения,  $n = 100$ , результаты 100 тестов.

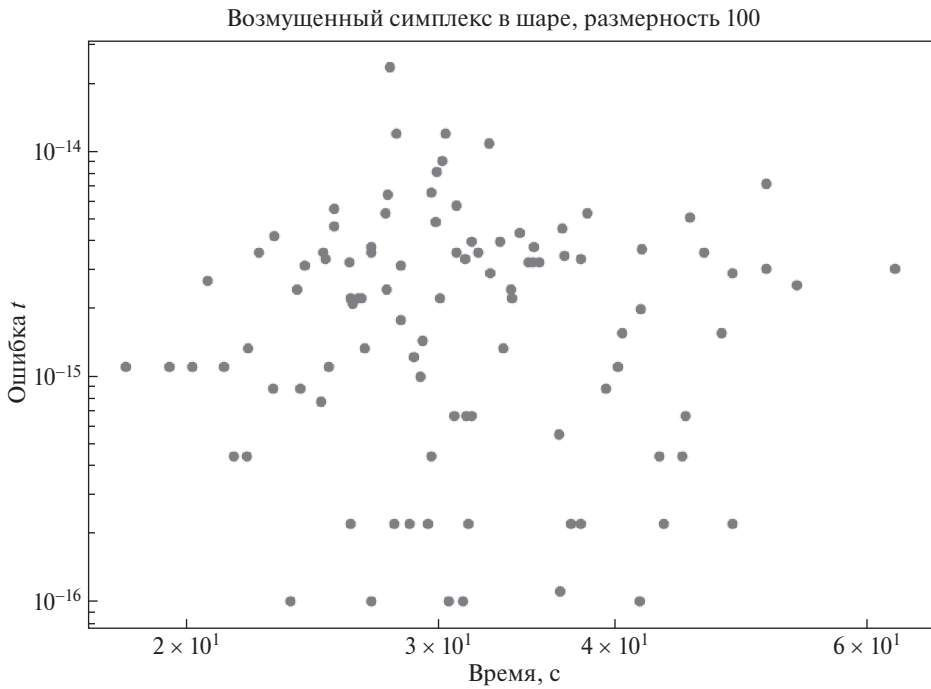


Рис. 3. Погрешность  $t$  в зависимости от времени выполнения,  $n = 100$ .

Если  $A = \text{conv}(E_1 \cup \dots \cup E_{n+1})$ ,  $E_j = v_j + M_j B_1(0)$ , опорную функцию  $A$  можно вычислить следующим образом:

$$(24) \quad h_A(p) = \max_i h_{E_i}(p).$$

Затем градиент  $h_A$  вычисляется как градиент  $h_{E_k}$ , где  $E_k$  – эллипсоид с наибольшим  $h_{E_k}(p)$ .

Таким образом, вычисление опорной функции выпуклой оболочки  $n + 1$  эллипсоидов вычислительно гораздо затратнее.

#### 4. Частный случай симплекса в шаре

Пусть в этом разделе  $B$  – шар, а  $A$  – симплекс, содержащий центр описанной сферы. В этом случае  $x^0 + t^0 \partial B$  совпадает с описанной сферой  $A$ . Достаточно рассмотреть случай  $x^0 = 0$ ,  $t^0 = 1$ ,  $B = B_1(0)$ , поэтому эти равенства будут предполагаться на протяжении всей главы.

*Лемма 3. Минимумы  $f_{t,x}$  зависят только от  $x$  и не зависят от  $t$ .*

*Определение 1. Множество  $F \subset \mathbb{R}^n$  является замыканием множества таких  $x \in \mathbb{R}^n$ , что  $f_{t,x} = (x, p) + h_B(p) - h_A(p)$  имеет  $n + 1$  минимумов на единичной сфере.*

Поскольку для  $x \in F$  алгоритм 1 имеет шанс сойтись (иначе алгоритм просто не сможет найти  $n + 1$  минимумов  $f_{t,x}$ ), изучим некоторые свойства  $F$ , особенно ограничения на его объем.

*Лемма 4. Если  $n = 2$ , то  $F = \text{conv}(A \cup -A)$ ,  $\text{Vol}(F) = 2\text{Vol}(A)$ .*

Пусть  $v_1, \dots, v_{n+1}$  – вершины  $A$ . Следующая лемма описывает  $F$  в терминах  $v_1, \dots, v_{n+1}$ .

*Лемма 5.*

$$(25) \quad F = \{x \in \mathbb{R}^n | (v_j - x, v_j) \geq (v_j - x, v_i) \forall i, j\},$$

$$(26) \quad F = \{x \in \mathbb{R}^n | (v_i - x, v_i - x) \geq (v_i - x, v_j - x) \forall i, j\}.$$

$F$  – многогранник, ограниченный гиперплоскостями, содержащими  $v_i$ , и ортогональными  $v_i - v_j$ , для всех  $i \neq j$ .

*Теорема 3. Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерный симплекс с вершинами  $v_1, \dots, v_{n+1}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R}^n | (v_i - x, v_i - x) \geq (v_i - x, v_j - x) \forall i, j\}$ . Затем*

$$(27) \quad \text{Vol}(F) \geq n! \text{Vol}(A),$$

*и если выполняется равенство, то  $F$  замощает  $\mathbb{R}^n$ .*

Теорема 2 утверждает, что существует некоторая окрестность решения, такая что алгоритм 1 сходится с некоторой скоростью. Однако она ничего не говорит о размерах этой окрестности. Следующие две теоремы дают некоторую информацию об этой окрестности.

*Теорема 4. Пусть  $D = \max_{i,j} \|v_i - v_j\|$ . Если на текущей итерации Алгоритм 1 находится в состоянии  $t$ ,  $x$ , где  $x \in F$  и*

$$(28) \quad \|x\| \leq \frac{7}{16\sqrt{4 - D^2}},$$

*$t \leq 1$ , то  $\|x'\| \leq \|x\|$ , где  $t'$ ,  $x'$  – состояние алгоритма на следующей итерации.*

*Теорема 5. Пусть  $d = \min_{i,j} \|v_i - v_j\|$  и  $d > 1$ . Тогда для состояния  $t$ ,  $x$ , где  $x \in \text{int}(F)$ ,  $t \leq 1$ , на следующей итерации  $\|x'\| < \|x\|$ . Следовательно,  $x' \in F$ .*

Поскольку при больших  $n$  все ребра случайного симплекса, вписанные в единичную сферу, почти наверняка имеют длину больше 1, приведенная выше теорема почти наверняка применима. В этих случаях достаточно  $\|x\| < 0,5$  на начальной итерации для сходимости алгоритма 1.

### **5. Связь чебышевского центра симплекса и возмущенного симплекса**

В предыдущем разделе описано поведение алгоритма в случае, когда  $B$  – шар, а  $A$  – симплекс, содержащий центр своей описанной сферы. Решение такой задачи очевидно: нужно просто вписать симплекс в сферу. Поэтому пока утверждения, приведенные в предыдущем разделе, на практике бесполезны. Содержательным случаем являлся бы анализ возмущенной задачи из предыдущего раздела.

Теорема 2 описывает класс множеств  $A$ , центр Чебышева которых можно найти с помощью алгоритма 1. Эти множества описываются как «возмущенные симплексы»:  $A = \text{conv}((v_1 + C_1) \cup \dots \cup (v_{n+1} + C_{n+1}))$ , где  $v_j$  – точки,  $C_j$  являются  $r$ -сильно выпуклыми множествами, а  $f$  гарантированно имеет  $n + 1$  нулей. Интуитивно можно надеяться, что поведение алгоритма 1 для «возмущенного» симплекса не должно сильно отличаться от его поведения для симплекса, изученного в предыдущем разделе. Обсудим это в данном разделе.

Пусть  $B$  – шар на протяжении этого раздела. В теореме 2 можно сделать  $C_j \subset B_r(0)$  с помощью сдвига, поскольку  $C_j$   $r$ -сильно выпукло, а значит, содержится в шаре радиуса  $r$ . Сформулируем теорему о множестве  $F$ , определенном в предыдущем разделе.

*Теорема 6. Пусть  $B = B_1(0)$ ,  $A = \text{conv}((v_1 + C_1) \cup \dots \cup (v_{n+1} + C_{n+1}))$ ,  $C_j$  –  $r$ -сильно выпуклые множества, как в теореме 2. Пусть  $C_j \subset B_r(0)$ .  $F$  – это множество  $x \in \mathbb{R}^n$  таких, что  $f_{t,x}(p) = (x, p) - h_A(p)$  имеет  $n + 1$  минимумов на единичной сфере. Пусть  $\tilde{A}$  – симплекс с вершинами  $v_j$ ,  $\tilde{A} = \text{conv}(v_1, \dots, v_{n+1})$ . Пусть  $\tilde{F}$  – множество  $x \in \mathbb{R}^n$ , таких что  $f_{t,x}(p) =$*

$= (x, p) - h_{\tilde{A}}(p)$  имеет  $n + 1$  минимумов на единичной сфере. Тогда

$$(29) \quad F + B_{r/d}(0) \supset \tilde{F},$$

где  $d = \min_{i \neq j} \|v_i - v_j\|$ .

Замечание. Справедливо несколько более сильное утверждение:

$$(30) \quad F + B_\varepsilon(0) \supset \tilde{F},$$

где

$$(31) \quad \varepsilon = \frac{\max_{i,j} \max_{p \in S^{n-1}} (h_{C_i}(p) - h_{C_j}(p))}{d} \leq \frac{r}{d}.$$

Например, если все множества  $C_j$  одинаковы, то  $F \supset \tilde{F}$ .

## 6. Заключение

Рассматривается задача оптимизации (1). Предложен, реализован и обсужден алгоритм 1, решающий задачу для конкретного класса множеств  $A, B$ . Алгоритм выполняет несколько итераций. На каждой итерации он ищет минимумы «зазора» между  $A$  и  $x + tB$ , используя градиентный спуск. На практике алгоритм сходится очень быстро даже для 100-мерных задач, демонстрируя квадратичную скорость сходимости. Однако, чтобы гарантировать наличие сходимости, необходимо наложить дополнительные ограничения на  $A$  и  $B$ . Было теоретически исследовано поведение алгоритма для задач вида «симплекс в шаре». Исследованы свойства множества  $F$  таких начальных условий, что существует  $n + 1$  минимумов  $f_{t,x}$ , и, таким образом, алгоритм 1 может дойти до следующей итерации. Далее было показано, что если немного возмутить симплекс, то  $F$  тоже изменится несильно (теорема 6). Основные теоретические результаты: теорема 1 о скорости сходимости алгоритма; теорема 2, описывающая класс задач, к которым применим алгоритм; теорема 3, ограничивающая объем  $F$  и дающая симпатичный факт о замощении  $\mathbb{R}^n$ ; теоремы 4, 5, описывающие такие начальные условия, при которых сходимость алгоритма 1 гарантирована; теорема 6, которая устанавливает связь между множеством  $F$ , когда  $A$  – симплекс и когда  $A$  – возмущенный симплекс.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 2.* Функции  $(x, p)$  и  $th_B(p)$  дифференцируемы. Достаточно доказать, что  $h_A$  дифференцируема в минимумах  $f_{t,x}$ .

Пусть  $p_0$  будет минимумом  $f_{t,x}$ ;  $h_A$  – выпуклая функция, имеющая субдифференциал  $\partial h_A$ . Построим доказательство от противного. Пусть  $\partial h_A(p_0)$  имеет более одного элемента.

Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta$  такой, что для любого  $p \in B_\delta(p_0)$  выполняется следующее неравенство:

$$(II.1) \quad |\varphi(p) - \varphi(p_0) - (g, p - p_0)| < \varepsilon \|p - p_0\|.$$

Для всех  $y \in \partial h_A(p_0)$

$$(II.2) \quad h_A(p) \geq h_A(p_0) + (y, p - p_0),$$

$$(II.3) \quad -h_A(p) + h_A(p_0) \geq (-y, p - p_0).$$

Уравнения (II.1) и (II.3) дают

$$(II.4) \quad \varphi(p) - \varphi(p_0) - h_A(p) + h_A(p_0) \leq \varepsilon \|p - p_0\| + (g, p - p_0) - (y, p - p_0),$$

$$(II.5) \quad f(p) - f(p_0) \leq \varepsilon \|p - p_0\| + (g - y, p - p_0).$$

Поскольку в  $\partial h_A(p_0)$  больше одного элемента, существует такой  $y \in \partial h_A(p_0)$ , что  $y \neq g$ . Тогда при  $p - p_0 = \delta \frac{y-g}{\|y-g\|}$

$$(II.6) \quad f(p) - f(p_0) \leq \varepsilon \delta - \delta \|g - y\|,$$

что меньше нуля для достаточно малых  $\varepsilon$ . Это противоречит тому, что  $f$  имеет минимум в  $p_0$ .

*Доказательство теоремы 1.* Достаточно рассмотреть случай  $x^0 = 0$ , поскольку другие случаи можно свести к этому подходящим сдвигом. Будем считать, что  $x^0 = 0$ . Для  $p$  из некоторой окрестности  $U(p_j^0)$  справедливы следующие неравенства:

$$(II.7) \quad \begin{cases} f_{t,x}(p) = (x, p) + th_B(p) - h_A(p) \geq (x, p) + (t - t^0)h_B(p) + \mu \|p - p^0\|^2, \\ f_{t,x}(p) = (x, p) + th_B(p) - h_A(p) \leq (x, p) + (t - t^0)h_B(p) + M \|p - p^0\|^2. \end{cases}$$

Пусть  $p'$  – минимум  $f_{t,x}$  в  $U(p_j^0)$ . Сначала оценим  $\|p' - p_j^0\|$ .

$$(II.8) \quad \begin{cases} f_{t,x}(p') = (x, p') + th_B(p') - h_A(p') \geq \\ \geq (x, p') + (t - t^0)h_B(p') + \mu \|p' - p^0\|^2, \\ f_{t,x}(p') \leq \min_{p \in U(p_j^0)} \{(x, p) + (t - t^0)h_B(p) + M \|p - p^0\|^2\} \leq \\ \leq (x, p_j^0) + (t - t^0)h_B(p_j^0). \end{cases}$$

Тогда

$$(II.9) \quad (x, p') + (t - t^0)h_B(p') + \mu \|p' - p^0\|^2 \leq f_{t,x}(p') \leq (x, p_j^0) + (t - t^0)h_B(p_j^0),$$

$$(II.10) \quad (x, p') + (t - t^0)h_B(p') + \mu \|p' - p^0\|^2 \leq (x, p_j^0) + (t - t^0)h_B(p_j^0).$$

Откуда получаем

$$(П.11) \quad \mu \|p' - p^0\|^2 \leq (x, p_j^0 - p') + (t - t^0)(h_B(p_j^0) - h_B(p')).$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и определение градиента опорной функции, получим

$$(П.12) \quad \mu \|p' - p^0\|^2 \leq (x, p_j^0 - p') + (t - t^0)(h_B(p_j^0) - h_B(p')) \leq$$

$$(П.13) \quad \leq \|x\| \|p' - p_j^0\| + |t - t^0| \|\nabla h_B(p_j^0)\| \|p' - p_j^0\| (1 + o(1)).$$

Тогда

$$(П.14) \quad \|p' - p_j^0\| \leq Const(\|x\| + |t - t^0|)$$

для некоторой константы  $Const$ , не зависящей от  $x$  и  $t$  в некоторой окрестности  $(t^0, x^0)$ . Теперь есть оценка погрешности  $\|p' - p_j^0\|$ .

Для состояния алгоритма на следующей итерации  $t', x'$ ,

$$(П.15) \quad (x', p'_j) + t' h_B(p'_j) - h_A(p'_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n+1\},$$

$$(П.16) \quad (x', p'_j) + (t' - t^0) h_B(p'_j) = h_A(p'_j) - t^0 h_B(p'_j).$$

Это система линейных уравнений относительно  $x'$  и  $t' - t^0$ . Поскольку при любом фиксированном  $j$  правая часть уравнения равна  $h_A(p'_j) - t^0 h_B(p'_j) = -f(p'_j)$ , то норма правой стороны во всей системе не превосходит  $\sqrt{n+1} M \|p'_j - p_j^0\|^\alpha \leq Const(\|x\| + |t - t^0|)^\alpha$ . Матрица этой системы не вырождена, если  $0 \in \text{conv}(\{p'_1, \dots, p'_{n+1}\})$ , что справедливо, если  $t$  и  $x$  достаточно близки до  $t^0, x^0$ . Обратная матрица имеет ограниченную норму для  $(p'_1, \dots, p'_{n+1})$  из некоторой окрестности  $(p_1^0, \dots, p_{n+1}^0)$ . Таким образом, справедлива оценка

$$(П.17) \quad \|(t' - t^0, x'_1 - x_1^0, \dots, x'_n - x_n^0)^T\| \leq Const(\|x\| + |t - t^0|)^\alpha \leq$$

$$(П.18) \quad \leq Const\|(t - t^0, x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0)^T\|^\alpha,$$

что завершает доказательство.

*Доказательство теоремы 2.* Достаточно доказать утверждение для  $x^0 = 0, t^0 = 1$ .

1. Заметим, что  $(A \cap \partial B) \subset \bigcup_j (v_j + C_j)$ .

Действительно, по теореме Каратеодори  $A$  является объединением симплексов с вершинами из множеств  $v_j + C_j$ . Симплекс, являющийся подмножеством шара, может пересекать границу шара только по своим вершинам. Итак, каждая точка из  $A \cap \partial B$  принадлежит  $v_j + C_j$  для некоторого  $j$ .

2. Для каждого  $j$  множество  $(v_j + C_j) \cap \partial B$  содержит не более одного элемента.

Докажем от противного, т.е. если для некоторого  $j$  существуют различные  $a, b \in (v_j + C_j) \cap \partial B$ . Пусть  $M$  –  $r$ -сильно выпуклая оболочка  $\{a, b\}$ :  $M = \text{strconv}_r(\{a, b\})$ . Поскольку множества  $v_j + C_j$  сильно выпуклые,

$$(P.19) \quad M \subset v_j + C_j.$$

Поскольку  $a, b \in \partial B = \partial B_1(0)$  и  $r < 1$ ,

$$(P.20) \quad M \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \emptyset.$$

Тогда

$$(P.21) \quad (v_j + C_j) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \emptyset,$$

что противоречит тому, что  $(v_j + C_j) \subset B$ .

3. Для каждого  $j$  множество  $(v_j + C_j) \cap \partial B$  содержит ровно один элемент. По предыдущему пункту  $v_j + C_j$  пересекает  $\partial B$  не более чем в одной точке. По условию теоремы  $f$  имеет не менее  $n + 1$  нулей, тогда  $A \cap \partial B$  имеет не менее  $n + 1$  элементов. Итак,  $(v_1 + C_1) \cup \dots \cup (v_{n+1} + C_{n+1})$  пересекает  $\partial B$  как минимум по  $n + 1$  точкам. Таким образом, каждое множество  $v_j + C_j$  пересекает  $\partial B$ .

4. В некоторой окрестности каждого своего нуля  $f$  имеет квадратичную верхнюю оценку.

Пусть  $p_1^0, \dots, p_{n+1}^0$  – нули  $f$ . Для симплекса  $S = \text{conv}(\{p_1^0, \dots, p_{n+1}^0\})$  и точки  $p$  из некоторой окрестности  $p_j^0$  справедливо равенство:  $h_S(p) = (p, p_j^0) = 1 - \frac{1}{2}\|p - p_j^0\|^2$ . Поскольку  $S \subset A$ ,  $h_A(p) \geq h_S(p)$ , это дает искомую оценку  $1 - h_A(p) \leq 1 - h_S(p) = \frac{1}{2}\|p - p_j^0\|^2$ .

5. В некоторой окрестности каждого своего нуля  $f$  имеет квадратичную оценку снизу.

$v_j + C_j \subset B_r((1 - r)p_j^0)$ , следовательно,  $A \supset \text{conv}(B_r((1 - r)p_1^0) \cup \dots \cup B_r((1 - r)p_{n+1}^0)) = B_r(0) + (1 - r)\text{conv}(\{p_1^0, \dots, p_{n+1}^0\})$ . Если  $A$  – это сумма симплекса и шара, то искомая оценка справедлива. Тогда и для данного  $A$  эта оценка справедлива.

Таким образом, показано, что все условия теоремы 1 выполнены, причем  $\alpha = 2$ . Тогда в этой задаче присутствует квадратичная сходимость алгоритма 1.

*Доказательство теоремы 3.* Определим решетку  $\Lambda$ , порожденную  $v_i - v_{n+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ :

$$(P.22) \quad \Lambda = \{c_1(v_1 - v_{n+1}) + \dots + c_n(v_n - v_{n+1}) \mid c_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Объем элементарной ячейки этой решетки равен  $n! \text{Vol}(A)$ .

Рассмотрим диаграмму Вороного для  $\Lambda$ . Пусть  $C$  – ячейка диаграммы Вороного, содержащая нуль.

$$(П.23) \quad C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \leq \frac{1}{2}(y, y) \forall y \in \Lambda \setminus \{0\} \right\}.$$

Можно заметить, что

$$(П.24) \quad F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x, v_i - v_j) \leq \frac{1}{2}(v_i - v_j, v_i - v_j) \forall i, j \right\}.$$

Поскольку  $v_i - v_j \in \Lambda$ , набор линейных ограничений, определяющих  $F$ , является подмножеством множества линейных ограничений, определяющих  $C$ . Тогда  $C \subset F$ , и

$$(П.25) \quad \text{Vol}(F) \geq n! \text{Vol}(A)$$

следует немедленно.

Если  $\text{Vol}(F) = \text{Vol}(C) = n! \text{Vol}(A)$ , то  $F = C$  и  $F$  замощает  $\mathbb{R}^n$ , поскольку  $C$  замощает  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство теоремы 6.*

1. Если для каждого  $j$  существует такой  $p_j \in S^{n-1}$ , что для любого  $i \neq j$

$$(П.26) \quad h_{C_j}(p_j) + (v_j, p_j) \geq h_{C_i}(p_j) + (v_i, p_j),$$

то  $x \in F$ . Действительно, каждому минимуму  $f_{t,x}(p)$  соответствует свой  $C_j$  (см. доказательство теоремы 2, раздел 3), и для того, чтобы  $C_j$  имел связанный с ним минимум, достаточно выполнения  $(x, p_j) - h_{v_j+C_j}(p_j) \leq (x, p_j) - h_{v_i+C_i}(p_j)$  для некоторого  $p_j$ , что эквивалентно (П.26).

2. Рассмотрим предыдущий пункт для  $p_j = \frac{v_j - x}{\|v_j - x\|}$ . Тогда если для каждого  $j$  и любого  $i \neq j$

$$(П.27) \quad h_{C_j}(v_j - x) + (v_j, v_j - x) \geq h_{C_i}(v_j - x) + (v_i, v_j - x),$$

тогда  $x \in F$ .

3.

$$(П.28) \quad 0 \leq h_{C_j}(p) \leq r,$$

поскольку  $C_j \subset B_r(0)$ . Это дает следующее.

4. Если для каждых  $j$  и  $i \neq j$

$$(П.29) \quad (v_j, v_j - x) \geq (v_i, v_j - x) + r,$$

то  $x \in F$ .



5. Сравним:

$$(П.30) \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid (v_i - v_j, x) - (v_i - v_j, v_j) \geq r\} \subset F,$$

$$(П.31) \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid (v_i - v_j, x) - (v_i - v_j, v_j) \geq 0\} = \tilde{F}.$$

Если  $x \in \tilde{F}$ , то  $x + r \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|^2} \in F$ . Тогда

$$(П.32) \quad F + B_{r/d}(0) \supset \tilde{F},$$

что и требовалось.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балашов М.В.* Покрытие множества выпуклым компактом: оценки погрешности и вычисление // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 13. С. 337–349.
2. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
3. *R. Tyrrell Rockafellar.* Convex Analysis. Princeton University Press, 1997.
4. *Botkin N., Turova V.* An algorithm for finding the Chebyshev center of a convex polyhedron // Appl. Mat. Optim. 1995. V. 29. P. 211–222.
5. *Xia Y., Yang M.* Chebyshev center of the intersection of balls: complexity, relaxation and approximation // Mathematical Programming. 2021. V. 187. P. 287–315.
6. *Frankowska H., Olech C.* R-convexity of the integral of set-valued functions // Contribut. Anal. Geometry. 1980. V. 117–129.
7. *Vial J.-Ph.* Strong and Weak Convexity of Sets and Functions // Mathematics of Operations Research. 1983. V. 8. No. 2. P. 231–259.
8. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge University Press, 2004.
9. *Li X., Zhu Z., Man-Cho S., Lee J.D.* Incremental Methods for Weakly Convex Optimization // arXiv, 2019. V. 1907.11687v1.
10. *Davis D., Drusvyatskiy D., MacPhee K.J., Paquette C.* Subgradient Methods for Sharp Weakly Convex Functions // arXiv, 2018. V. 1803.02461v1.
11. *Schneider R., Uschmajew A.* Convergence results for projected line search methods on varieties of low-rank matrices via Lojasiewicz inequality // SIAM J. Optim. 2015. V. 25. No. 1. P. 622–646.
12. *Balashov M.V.* About the Gradient Projection Algorithm for a Strongly Convex Function and a Proximally Smooth Set // J. Convex Anal. 2017. V. 24. No. 2. P. 493–500.
13. *Bello-Cruz Y., Li G., Nghia T.T.A.* On the Linear Convergence of Forward-Backward Splitting Method: Part I – Convergence Analysis // J. Optim. Theory Appl. 2021. V. 188. P. 378–401.
14. *Ioffe A.D.* Metric regularity – a survey Part I // J. Austral. Math. Soc. 2016. V. 101. P. 1–56.
15. *Absil P.-A., Mahony R., Sepulchre R.* Optimization Algorithms on Matrix Manifolds. Princeton University Press, 2008.

16. *Cen X., Xia Y., Gao R., Yang T.* On Chebyshev Center of the Intersection of Two Ellipsoids // Optimization of Complex Systems: Theory, Models, Algorithms and Applications. Springer International Publishing, 2020. P. 135–144.
17. *Beltran F., Finardi E.C., Fredo G.M., Oliveira W.* Improving the performance of the stochastic dual dynamic programming algorithm using Chebyshev centers // Optim. Engineer. 2022. V. 23. P. 147–168.
18. *Beck A., Eldar Y.C.* Regularization in Regression with Bounded Noise: A Chebyshev Center Approach // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2007. V. 29. No. 2. P. 606–625.
19. *Cerone V., Piga D., Regruto D.* Set-Membership Error-in-Variables Identification Through Convex Relaxation Techniques // IEEE Transact. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 2. P. 517–522.
20. *Hou J., Teng F., Yin W., Song Y., Hou Y.* A Cost-Effective Cyber-Defense Strategy: Attack-Induced Region Minimization and Cybersecurity Margin Maximization // arXiv. 2023. V. 2302.07597.
21. *Samadi S., Roux J., Tanguy A., Caron S., Kheddar A.* Some journal publication in English // IEEE Robot. Autom. Lett. 2021. V. 6. No. 2. P. 4032–4039.
22. *Ren X., Mo Y., Chen J., Johansson K.H.* Secure state estimation with byzantine sensors: A probabilistic approach // IEEE Transact. Autom. Control. 2020. V. 65. No. 9. P. 3742–3757.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. Р.П. АГАЕВ, д-р физ.-мат. наук (agaraf3@gmail.com),  
Д.К. ХОМУТОВ (homutov\_dk@mail.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## О ГРАНИЧНОМ ЗНАЧЕНИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И АСИМПТОТИКЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОТОКОЛА КОНСЕНСУСА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Изучается задача согласования характеристик в многоагентной системе с информационными влияниями. В частности, изучена модель многоагентной системы, в которой информация между агентами передается с постоянным для всех агентов запаздыванием. С помощью критерия Найквиста, примененного Цыпкиным для систем с запаздыванием, получена формула для граничного значения запаздывания, входящего как параметр в систему дифференциальных уравнений с несимметричной постоянной лапласовской матрицей. Найдено условие, при котором устойчивость системы не зависит от запаздывания. Полученные результаты обобщают некоторые ранее полученные результаты и могут быть применены при анализе согласования характеристик в многоагентной системе со сложным протоколом.

*Ключевые слова:* многоагентная система, консенсус, собственный проектор, лапласовская матрица, оргграф связей, управление с запаздыванием, метод Цыпкина.

**DOI:** 10.31857/S0005231024060068, **EDN:** XXBDLA

### 1. Введение

Начиная с 40-х годов прошлого века появилось множество публикаций и классических результатов по устойчивости квазиполиномов, функционально-дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом и т.п. (см., например, [1–6]). Системы с запаздыванием – также хорошо изученный раздел теории автоматических систем (см., например, [7–13]).

Проблема запаздывания в многоагентных системах с информационными влияниями изучена рядом авторов в работах по консенсусу (см. например, [14–20]). Во второй части книги [14] приведен обзор некоторых публикаций по запаздыванию в дискретных системах, синхронизации в сетях с запаздывающими связями, приближенному консенсусу в сетях с задержками в измерениях и др.

В данной статье исследуется протокол согласования характеристик в многоагентных системах (МАС) с временной задержкой. Предполагается, что агенты получают данные о состояниях своих соседей с запаздыванием, а также по той же топологии усредняют свои данные без запаздывания для согласования характеристик. Для такого протокола решается задача зависимости

граничного значения запаздывания от спектра лапласовской матрицы. Поставленная задача актуальна не только для моделей многоагентных систем с лапласовской матрицей, но и для систем с произвольной квадратной матрицей. Если для симметричной матрицы решение данной задачи сводится к решению скалярного уравнения с действительными коэффициентами, которая достаточно хорошо изучена, то для произвольной квадратной матрицы аналогичное скалярное уравнение с комплексными коэффициентами не было исследовано. Исследование также представляет теоретический интерес: полученные результаты могут быть использованы для анализа систем с множественными входом и выходом (ММО-системы).<sup>1</sup>

МАС с информационными воздействиями занимают центральное место среди всех МАС, встречающихся в различных предметных областях (см., например, [21–26]). Особенность таких систем состоит в том, что система с информационными воздействиями, как обычно, представляется в виде ориентированного графа, вершины которого соответствуют агентам, а дуги – воздействиям агентов друг на друга. При применении непрерывного протокола строится матрица Лапласа, и система описывается системой дифференциальных уравнений с построенной матрицей Лапласа.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведены основные понятия и определения, использованные в работе, изложены некоторые известные результаты по граничным значениям временной задержки и приведены вспомогательные и ранее доказанные утверждения. В разделе 3 приведены главные результаты настоящей работы и их следствия.

## 2. Необходимые понятия и вспомогательные результаты

Рассмотрим многоагентную систему с множеством агентов  $V = \{1, \dots, n\}$ . Такую систему можно представить в виде орграфа связей  $\Gamma = (V, E)$ , где  $E \subset V \times V$  – множество дуг. В этих обозначениях множество агентов – это множество вершин орграфа  $\Gamma$ . Предполагается, что если агент  $j$  влияет на агента  $i$  с весом  $a_{ij}$ , то существует дуга из вершины  $j$  в вершину  $i$  с весом  $a_{ij}$ . Матрицу  $A = (a_{ij})$  назовем коммуникационной матрицей (или матрицей влияний).

*Определение 1.*  $L$  – матрица Лапласа, соответствующая орграфу  $\Gamma$ , определяется следующим образом: для  $i \neq j$   $l_{ij} = -a_{ij}$ ,  $l_{ii} = \sum_{k \neq i} a_{ik}$ .

По определению матрицы Лапласа  $L\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$ , где  $\mathbf{1}_n$  и  $\mathbf{0}_n$  – векторы размерности  $n$ , состоящие из единиц и нулей соответственно. Это означает, что 0 является собственным значением  $L$ . Легко установить (например, с помощью теоремы Гершгорина), что каждое ненулевое собственное значение  $L$  имеет положительную действительную часть.

---

<sup>1</sup> Некоторые изложенные в настоящей статье результаты без доказательств и вкратце представлены в работе конференции RusAutoCon-2023.

*Определение 2.* Индекс  $\nu$  квадратной матрицы  $A$  – это порядок наибольшего жорданова блока с нулевой диагональю в жордановой форме матрицы  $A$  или минимальное число  $\nu$ , удовлетворяющее равенству  $\text{rank}(A^\nu) = \text{rank}(A^{\nu+1})$ .

*Определение 3.* Собственным проектором (см., например, [27]) квадратной матрицы  $A$  называют идемпотентную матрицу  $A^\dagger$ , у которой  $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^\nu)$  и  $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^\nu)$ , где  $\nu$  – индекс матрицы  $A$ ,  $\mathcal{R}(X) = \{y : y = Xx\}$  – область значений матрицы  $X$ ,  $\mathcal{N}(X) = \{x : Xx = 0\}$  – нуль-пространство (ядро) матрицы  $X$ .

*Определение 4.* Будем говорить, что МАС с запаздыванием и заданным протоколом устойчива, если существует конечный предел вектора характеристик агентов.

*Определение 5.* Будем говорить, что МАС с запаздыванием и заданным протоколом сходится, если консенсус достигается для любого вектора начальных значений или если предел вектора характеристик агентов можно представить в виде  $c\mathbf{1}_n$ , где  $c \in \mathbb{R}^1$  – значение консенсуса.

В данной статье рассмотрим протокол консенсуса в многоагентных системах в виде

$$(1) \quad \dot{x}(t) = -aLx(t) - bLx(t - \tau),$$

где  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq b$ .

Протокол (1) является частным случаем системы с запаздыванием:

$$(2) \quad \dot{x}(t) = A_1x(t) + A_2x(t - \tau),$$

для которой часто изучаются две задачи: 1) при каком условии устойчивость системы не зависит от запаздывания; 2) если устойчивость зависит от запаздывания, то найти граничное значение запаздывания.

Пусть  $I$  – единичная матрица. Характеристическая функция системы (2) определяется следующим образом:

$$(3) \quad f(s) = \det(sI - A_1 - A_2e^{-s\tau}).$$

Известно, что функция  $f(s)$  целая (аналитическая во всей комплексной плоскости) и все ее нули на комплексной плоскости расположены следующим образом: существует действительное число  $\eta$  такое, что нет нулей  $s$ , для которых  $\text{Re}(s) > \eta$ , и только для конечного числа нулей выполняется  $0 \leq \text{Re}(s) \leq \eta$ . Система (2) изучалась многими авторами (см., например, [1, 5, 6, 9–12] и библиографию в [9]). Достаточное условие устойчивости системы (2) в зависимости от граничного значения  $\tau$  дано в [9] с использованием линейного матричного неравенства и метода Ляпунова. Зависимость устойчивости от  $\tau$  через обобщенные собственные значения  $A_1$  и  $A_2$  исследована в [12]. Независимости устойчивости системы от величины запаздывания посвящено немало

работ. Например, в [12] доказано, что если матрицы  $A_1$  и  $A_1 + A_2$  в системе (2) устойчивы и выполняется условие

$$(4) \quad \rho((i\omega I - A_1)^{-1}A_2) < 1, \quad \forall \omega > 0,$$

то система (2) устойчива.

В [10] исследовано влияние параметра запаздывания на устойчивость линейных динамических систем с запаздыванием. Для этой цели авторы предложили частотный метод анализа.

В [11] приведены свойства спектра квазиполинома (2) и изучена связь между максимально допустимой кратностью собственных значений и спектральной абсциссой – наибольшей действительной частью спектра матрицы динамической системы.

Для многоагентной системы с информационными влияниями зависимость граничного значения запаздывания от спектра матрицы Лапласа представляет большой интерес и является нетривиальной задачей. Однако протоколу консенсуса с временной задержкой посвящено сравнительно немного работ. Тем не менее, как было отмечено выше, несколько разделов книги [14] посвящены отдельным аспектам проблем сетевого управления с запаздыванием.

В [23] впервые был рассмотрен следующий базовый протокол с временной задержкой для симметричного случая:

$$(5) \quad \dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t - \tau) - x_j(t - \tau)),$$

где  $\mathcal{N}_i$  – множество агентов  $j$ , которые влияют на агента  $i$  с весом  $a_{ij}$ .

Условие консенсуса для такого протокола (с симметричным графом) сводится к скалярному случаю и неоднократно выводилось разными авторами. Например, из [1] этот результат можно получить как частный случай. Условие устойчивости (5) найдено также для произвольной устойчивой матрицы в [28].

Другой, не менее реалистичный протокол обсуждался в [29]:

$$(6) \quad \dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t - \tau)),$$

или в матричной форме

$$(7) \quad \dot{x}(t) = -\mu Ix(t) + Ax(t - \tau),$$

где  $\mu$  – сумма элементов строк матрицы  $A$ , которая считается одинаковой для всех строк матрицы  $A$ .

Известно, что устойчивость (5) зависит от  $L$ , т.е. система (5) устойчива, если  $\tau$  не превышает некоторого граничного значения, зависящего от спектра  $L$ . Кроме того, если в системе (5) консенсус достигается, то его значение

не зависит от  $\tau$ . Однако система (6) устойчива при любом  $\tau$ , но если также достигается консенсус, то его значение может зависеть от  $\tau$  (см. теорему 2 в [29]).

Далее рассмотрим протокол (1). Отметим, что эта система исследуется с помощью скалярного уравнения

$$(8) \quad \dot{y}(t) = -\alpha y(t) - \beta y(t - \tau),$$

где  $\alpha = a\lambda$ ,  $\beta = b\lambda$ ,  $\lambda$  – собственное значение матрицы  $L$ . Уравнение (8) для действительных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  изучалось многими авторами. Например, еще в 1950 г. в [30] были изучены корни трансцендентной функции, являющейся характеристической функцией скалярного разностно-дифференциального уравнения. (Также см. [1] и пример 2.4 в [12]).

Более общий случай

$$(9) \quad \dot{y}(t) - cy(t - \tau) = -ay(t) - by(t - \tau)$$

был изучен в [9], где рассматривалась задача устойчивости в зависимости от действительных чисел  $a, b$  и  $c$ .

Здесь изучаем систему (1) с помощью скалярного уравнения (8), где  $\alpha$  и  $\beta$  – комплексные числа.

Заметим, что если  $a = 0$ , то протокол (1) становится базовым протоколом консенсуса с временной задержкой (матричная форма (5)):

$$(10) \quad \dot{x}(t) = -Lx(t - \tau).$$

Для решения исследуемых проблем понадобятся следующие известные результаты, тесно связанные с теорией многоагентных систем.

*Утверждение 1.* [31] Для любой лапласовской матрицы  $L$  ее индекс (см. определение выше) равен единице, т.е.  $\text{ind } L = 1$ , и

$$(11) \quad LL^\dagger = L^\dagger L = 0_{n \times n}.$$

Следующая теорема доказана в [31, теорема 5].

*Теорема 1.*  $L^\dagger = \lim_{t \rightarrow \infty} (I + tL)^{-1}$ .

*Утверждение 2.* [32] Если  $x(t)$  – решение системы (12)

$$(12) \quad \dot{x}(t) = -Lx(t),$$

то

$$(13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^\dagger x(0).$$

*Утверждение 3.* Пусть система (10) устойчива, а  $x(t)$  является решением (10). Тогда для решения (10) также имеет место (13). Если  $0$  – простое собственное значение матрицы  $L$ , то протокол (10) сходится к консенсусу.

Утверждение 3 легко доказывается с помощью теоремы о конечном значении, утверждения 2 и теоремы 1.

### 3. Основные результаты

Рассмотрим следующие задачи для системы (1): 1) при каких значениях  $a$  и  $b$  система (1) устойчива независимо от  $\tau$ ; 2) если устойчивость системы зависит от  $\tau$ , то найти граничное значение  $\tau$ ; 3) если достигается консенсус для любого вектора начальных значений, то чему равно значение консенсуса?

Характеристическая функция системы (1) является трансцендентной функцией и имеет вид

$$(14) \quad f(s) = \det(sI + aL + be^{-\tau s}L).$$

Если  $\lambda_j \in \sigma(L)$  – собственное значение матрицы  $L$ , то  $f(s)$  можно представить как

$$f(s) = \prod_{j=1}^n f_{\lambda_j}(s) = \prod_{j=1}^n (s + a\lambda_j + b\lambda_j e^{-\tau s}).$$

Пусть  $f_{\lambda_j}(s)$  – характеристическая функция системы для скалярного случая:

$$(15) \quad f_{\lambda_j} = Q(s) + P(s)e^{-\tau s} = s + a\lambda_j + b\lambda_j e^{\tau s} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $Q(s) = s + a\lambda_j$ ,  $P(s) = b\lambda_j$ .

Для исследования устойчивости квазимногочлена воспользуемся методом Цыпкина [7]), основанным на критерии Найквиста для случая с запаздыванием<sup>2</sup>. Для этой цели квазимногочлен  $Q(s) + P(s)e^{-\tau s}$  примем за характеристическую функцию системы с запаздывающей обратной связью и его устойчивость оценим по амплитудно-фазовой характеристике соответствующей разомкнутой системы с запаздыванием.

Амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы с запаздыванием представим как (более подробно см. [7])

$$(16) \quad W_{\tau}(i\omega) = -\frac{P(i\omega)}{Q(i\omega\tau)}e^{-i\tau\omega} = -\frac{b\lambda_j}{i\omega + a\lambda_j}e^{-i\tau\omega} = -\frac{\beta}{i\omega + \alpha}e^{-i\tau\omega},$$

где  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = a\lambda_j$ ,  $\beta = \beta_1 + i\beta_2 = b\lambda_j$ . Для простоты у  $\alpha$  и  $\beta$  опустим нижний индекс, который указывает на  $j$ -е собственное значение матрицы  $L$ .

Далее в работе аргумент собственного значения  $\lambda_j$  обозначим через  $\phi_j$ , т.е. положим  $\phi_j = \arg(\lambda_j)$ . Пусть

$$(17) \quad \begin{aligned} W(i\omega) &= -\frac{P(i\omega)}{Q(i\omega\tau)} = -\frac{\beta_1 + i\beta_2}{\alpha_1 + i(\omega + \alpha_2)} = -\frac{(\beta_1 + i\beta_2)(\alpha_1 - i(\omega + \alpha_2))}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = \\ &= -\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} - i\frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = \\ &= x(\omega) + iy(\omega) = W^0(\omega)e^{i\theta(\omega)}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Этот метод тесно связан с принципом аргумента.



и

$$(18) \quad W_\tau(i\omega) = W(i\omega)e^{-i\tau\omega} = W^0(\omega)e^{i\theta(\omega)}e^{-i\tau\omega}.$$

Если  $W(i\omega) = x(\omega) + iy(\omega)$ , то после некоторых преобразований можно показать, что

$$(19) \quad \left(x(\omega) + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y(\omega) + \frac{b\text{Im}(\lambda_j)}{2a\text{Re}(\lambda_j)}\right)^2 = R^2,$$

где  $R = \frac{b|\lambda_j|}{2a\text{Re}(\lambda_j)}$ , т.е. функция  $W(s)$  мнимую ось конформно отображает в окружность.

Следующее утверждение следует из (17) и тождества (19).

*Утверждение 4. Амплитудно-фазовая характеристика  $W(i\omega)$  является окружностью на комплексной плоскости с центром в точке  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b\text{Im}(\lambda_j)}{2a\text{Re}(\lambda_j)}\right)$  и радиусом  $R = \frac{b|\lambda_j|}{2a\text{Re}(\lambda_j)}$ .*

Заметим, что

$$(20) \quad y = \frac{\beta_1\omega}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2}.$$

Согласно [7] выражение (17) назовем амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой эквивалентной системы без запаздывания. Устойчивость разомкнутой эквивалентной системы следует из выражения  $Q = s + a\lambda$ , где  $a > 0$ , а действительные части  $\lambda$  положительны. Амплитудно-фазовую характеристику замкнутой системы с запаздыванием представим как

$$\frac{W_\tau(i\omega)}{1 - W_\tau(i\omega)}.$$

В силу критерия Найквиста эквивалентная система устойчива, если точка  $(1, i0)$  лежит вне характеристики, и неустойчива, если точка  $(1, i0)$  лежит внутри нее.

В следующем утверждении приведено достаточное условие устойчивости системы (1).

*Утверждение 5. Система (1) устойчива при любом значении  $\tau \geq 0$ , если*

$$(21) \quad \frac{a}{b} > \max_{\lambda_j \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\cos \phi_j}.$$

*Замечание 1.* Доказательство утверждения 5 также можно получить из знаменитого метода Поляка об устойчивости и робастной устойчивости однотипной системы, состоящей из одинаковых звеньев и усилителей, опубликованного в [33]. Согласно [33], если  $W(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$  собственная (степень  $A(s)$

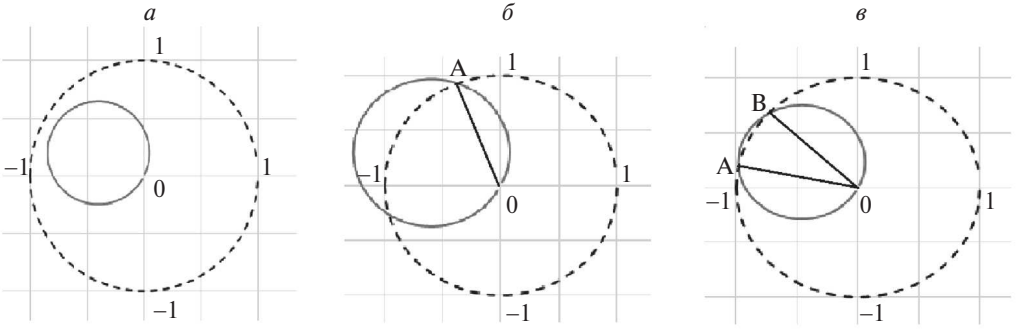


Рис. 1

не больше степени  $B(s)$ ) и не имеет правых полюсов, то для устойчивости  $D(W(s))$  все корни  $D(p)$  должны лежать вне круга радиуса  $\|W(s)\|_\infty$ :

$$(22) \quad \|p_i\| > \|W(s)\|_\infty.$$

В рассматриваемом здесь случае  $W(s) = -\frac{P(s)}{Q(s)}$  собственная, не имеет правых полюсов, а  $D(p) = 1 - p$ . Согласно утверждению 5, для всех  $s$  имеет место  $\|W(s)\| < 1$ , т.е. выполняется условие (22).

*З а м е ч а н и е 2.* Еще одно доказательство утверждения 5 можно получить как следствие из теоремы 2.1 в [12] (см. пример 2.6 там же), применив ее для системы (1).

В [34] обобщенный частотный метод, похожий на частотный метод анализа однопольных систем [33], применен для анализа многопольных систем со взаимодействующими агентами. Также в [34] в примере 2 было рассмотрено инерционное звено с запаздыванием. Однако для его устойчивости применен обобщенный частотный метод для дробно-рациональной функции, не являющейся трансцендентной.

Отметим, что при выполнении неравенства (21) окружность АФХ разомкнутой системы строго принадлежит единичному кругу с центром в  $(0, 0)$  (рис. 1, а).

*Теорема 2.* Пусть условие (21) не выполнено и

$$\lambda_j \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\} \mid a \leq \frac{1}{\cos \phi_j} b \right\}.$$

Тогда действительные части корней квазимногопольна (15) отрицательны, если

$$(23) \quad \tau < \tau_0^j = \frac{\arccos \left( -\frac{\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2} \right)}{\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} - \alpha_2},$$

и система (1) устойчива при любом  $\tau < \tau_0$ , где  $\tau_0 = \min_{\lambda_j \in \Lambda} \tau_0^j$ .

Согласно [7], если  $W(i0) < -1$  (рис. 1,б), то имеется одна критическая частота. В этом случае  $\frac{a}{b} < 1$ , критическое значение запаздывания определяется единственным образом и является граничным: если  $\tau < \tau_0^j$ , то квазимногочлен (15) устойчив, а при  $\tau > \tau_0^j$  – неустойчив.

При выполнении условий теоремы 2, если  $|W(i0)| < 1$ , то АФХ два раза пересекает единичную окружность и имеются две критические частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , где  $\omega_1 < \omega_2$ , соответствующие точкам  $A$  и  $B$  из рис. 1,в. По этим критическим частотам определяются два критических значения запаздывания  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно. В этом случае при  $\tau < \tau_2$  система устойчива, и  $\tau_2$  является граничным значением устойчивости системы. Если  $\tau_1 > \tau > \tau_2$ , то система неустойчива. Если  $\tau > \tau_2$ , то дальнейшее увеличение  $\tau$  приводит к чередованию неустойчивости и устойчивости системы. Если точки  $A$  и  $B$  достаточно близки, т.е. разница значений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  достаточно мала, то возможно сколь угодно число интервалов устойчивости и неустойчивости.

*Следствие 1. Если  $L$  – симметричная лапласовская матрица,  $b = 1$  и  $a = 0$ , то из (23) для каждого собственного значения получим:*

$$\tau_0^j = \frac{\arccos 0}{\lambda_j} = \frac{\pi}{2\lambda_j}.$$

Заметим, что  $\tau_0 = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}}$ . Этот результат совпадает с результатом, приведенным в [23]. Однако для скалярного случая данная оценка была приведена в [7] в качестве примера и неоднократно была получена в различной литературе.

Пусть в (23)  $b = 1$  и  $a = 0$ . Тогда для собственного значения  $\lambda_j$  в силу отрицательности  $\beta_2 = b \operatorname{Im}(\lambda_j) = \operatorname{Im}(\lambda_j)$  выполняется

$$\tau_0^j = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta_2}{|\beta|}\right)}{|\lambda_j|} = \frac{\arccos(\sin|\phi_j|)}{|\lambda_j|} = \frac{\pi/2 - |\phi_j|}{|\lambda_j|}.$$

*Следствие 2. Если  $L$  – произвольная лапласовская матрица,  $b = 1$  и  $a = 0$ , то*

$$\tau_0 = \min_{\lambda_j \neq 0} \frac{1}{|\lambda_j|} \left( \frac{\pi}{2} - |\phi_j| \right).$$

Это выражение совпадает с результатом об устойчивости произвольной матрицы, полученным в [28].

*Следствие 3. Если  $L = 1$ , т.е. рассматривается скалярный случай уравнения (1), то из (23) получим:*

$$\tau_0 = \frac{\arccos\left(-\frac{ab}{b^2}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Полученное выражение совпадает с граничным значением  $\tau$  для скалярного уравнения (2.22) из [1] (см. пример 2.4 из [1]).

*Теорема 3. Пусть система (1) устойчива. Тогда если  $x(t)$  – решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -aLx(t) - bLx(t - \tau), & t \geq 0; \\ x(t) = 0, & t \in [-\tau, 0), \end{cases}$$

*то*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^\dagger x(0),$$

*т.е. вектор, к которому сходится протокол (1), не зависит от коэффициентов  $a$  и  $b$ , а также от  $\tau$ .*

*Следствие 4. Если условие теоремы 3 выполнено и  $0$  – простое собственное значение матрицы  $L$ , то протокол (1) сходится к консенсусу, значение которого равно значению консенсуса базового протокола  $\dot{x}(t) = -Lx(t)$ .*

#### 4. Заключение

В данной статье исследован протокол консенсуса с запаздыванием. Получено условие, при котором сходимость протокола консенсуса не зависит от запаздывания. В случае нарушения этого условия найдено выражение для граничного значения запаздывания. Также исследовано асимптотическое поведение данного протокола. Доказано, что если в многоагентной системе с запаздыванием для любого вектора начальных значений консенсус достигается, то он определяется произведением собственного проектора на вектор начальных значений. Полученное в работе выражение для граничного значения  $\tau$  обобщает некоторые ранее полученные формулы. Дальнейшим объектом исследования авторов является модель консенсуса в виде (2), согласно которой агенты сперва получают данные от своих непосредственных соседей без задержки, а потом с некоторой задержкой  $\tau$  – от остальных агентов.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 5. Если выполняется условие (21), то для любого  $\lambda_j \in \sigma(L) \setminus \{0\}$  справедливо*

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{\cos \phi_j}.$$

Из последнего неравенства следует:

$$\frac{a^2}{b^2} > \frac{\operatorname{Re}^2(\lambda_j) + \operatorname{Im}^2(\lambda_j)}{\operatorname{Re}^2(\lambda_j)} \implies \alpha_1^2 > |\beta|^2.$$

Тогда

$$|W(i\omega)| = \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2}} < \sqrt{\frac{|\beta|^2}{|\beta|^2 + (\omega + \alpha_2)^2}} \leq 1.$$

Таким образом, если  $\frac{a}{b} > \max_{\lambda_j \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\cos \phi_j}$ , то  $|W_0(i\omega)| < 1$ , и протокол (1) устойчив при любом  $\tau$ .

*Доказательство теоремы 2.* Задачу консенсуса системы с протоколом (1) будем исследовать с помощью квазимногочлена (15) с параметрами  $\lambda_j$  или  $\bar{\lambda}_j$ . Протокол (1) устойчив, если для каждого  $\lambda_j \in \Lambda$  соответствующий квазимногочлен (15) устойчив.

Итак, для фиксированного  $\lambda_j$  исследуем устойчивость квазимногочлена (15).

Увеличение запаздывания  $\tau$  может привести к тому, что точка  $(1, 0)$  будет лежать внутри амплитудно-фазовой характеристики  $W_\tau(i\omega)$ . Значение  $\tau$ , при котором нули функции (15) переходят мнимую ось или при котором точка  $(1, 0)$  принадлежит  $W_\tau(i\omega)$ , называют критическим. Такие времена и частоты определяются условием

$$(II.1) \quad W_\tau(s) = 1,$$

или же

$$(II.2) \quad W^0(\omega) e^{i\theta(\omega)} e^{-i\tau\omega} = 1.$$

Для выполнения (II.2) должно быть:

$$1) W^0(\omega) = \frac{|\beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2}} = 1; \quad 2) \theta(\omega) - \tau\omega = -2\pi n,$$

где  $n$  – целое положительное число.

Условие  $|W^0(\omega)| = 1$  выполняется, когда  $(\omega + \alpha_2)^2 = |\beta|^2 - \alpha_1^2$ , т.е.

$$(II.3) \quad \omega = \pm \sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} - \alpha_2.$$

Тогда

$$(II.4) \quad x = -\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = -\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2};$$

$$y = -\frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = -\frac{\alpha_1\beta_2 \pm \beta_1\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2}.$$

Из второго условия, т.е.  $\theta(\omega) - \tau\omega = -2\pi n$ , следует:

$$(II.5) \quad \begin{aligned} \cos \theta(\omega) &= \cos(\tau\omega - 2\pi n); \\ \cos \theta(\omega) &= \cos \tau\omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее  $\theta(\omega)$ . В силу  $x^2 + y^2 = 1$  (поскольку  $(x, y)$  – точка пересечения с единичной окружностью)  $\cos \theta(\omega) = x$ , и из (II.3), (II.4) и (II.5) получим:

$$(II.6) \quad \tau_0^j = \frac{\arccos x}{\omega} = \frac{\arccos \left( -\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2} \right)}{\pm \sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} - \alpha_2}.$$

Если  $\lambda_j$  – комплексное собственное значение лапласовской матрицы  $L$ , то устойчивость (15) исследуем для  $\lambda_j$  и  $\bar{\lambda}_j$ . Знаменатель правой части (П.6) достигает максимального значения при отрицательной мнимой части рассматриваемой пары собственных значений и положительном знаке перед корнем, т.е. при  $\omega = \sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} + |\alpha_2|$ . Аналогично, числитель – убывающая неотрицательная функция: чем больше значение  $\left(-\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2}\right)$ , тем меньше значение функции  $\arccos(x)$ . Поэтому минимальное значение  $\tau_0^j$  достигается при собственном значении с отрицательной мнимой частью, и граничное значение определяется выражением (23). Тогда граничное значение задержки для (1) определяется как  $\tau_0 = \min_{\lambda_j \in \Lambda} \tau_0^j$ .

*Доказательство теоремы 3.* Пусть условие для граничного значения  $\tau$  выполнено. Тогда  $x(t)$  будет иметь предел, и в силу теоремы о конечном значении получим:

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI + aL + be^{-s\tau}L)^{-1}x(0) = \\ \text{(П.7)} \quad &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{s}(a + e^{-s\tau})L \right)^{-1} x(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( I + t(a + be^{-\tau/t})L \right)^{-1} x(0). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( I + t(a + be^{-\tau/t})L \right)^{-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} (I + tL)^{-1} = L^{\dagger}.$$

Тогда из (П.7) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( I + t(a + be^{-\tau/t})L \right)^{-1} x(0) = L^{\dagger} x(0).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. *Chebotarev N.G., Meiman N.N.* The Routh-Hurwitz problem for polynomials and entire functions // Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova. 1949. V. 26. P. 3–331.
3. *Pontryagin L.S.* On the zeros of some elementary transcendental functions [Russian] // Izv. Akad. Nauk SSR, Ser. Mat. 1942. V. 6. No. 3. P. 115–134.
4. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1966.
5. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
6. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

7. *Цыпкин Я.З.* Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // *АиТ.* 1946. Т. 7. №. 2–3. С. 107–129.
8. *Tsyppkin Y.Z., Minyue F.U.* Robust stability of time-delay systems with an uncertain time-delay constant // *Int. J. Control.* 1993. V. 57. No. 4. P. 865–879.
9. *Niculescu S.I.* Delay effects on stability: a robust control approach. London: Springer Science & Business Media, 2001.
10. *Niculescu S.I., Li X.G., Cela A.* Counting characteristic roots of linear delay differential equations. Part I // *Controlling Delayed Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications.* 2022. V. 604. P. 117–155.
11. *Niculescu S.I., Boussaada I.* Counting Characteristic Roots of Linear Delay Differential Equations. Part II // *Controlling Delayed Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications.* 2022. V. 604. P. 157–193.
12. *Gu K., Chen J., Kharitonov V.L.* Stability of time-delay systems. Berlin: Birkhäuser, 2003.
13. *Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.* Stability of functional differential equations. London: Academ. Press, 1986.
14. *Амелина Н.О., Аманьевский М.С., Проскурников А.В. и др.* Проблемы сетевого управления / Под ред. А.Л. Фрадкова. Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2015.
15. *Yu W., Ren W., Chen G., et al.* Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data // *Automatica.* 2011. V. 47. No. 7. P. 1496–1503.
16. *Munz U., Papachristodoulou A., Allgower F.* Delay robustness in consensus problems // *Automatica.* 2010. V. 46. No. 8. P. 1252–1265.
17. *Hou W., Fu M., Zhang H., Wu Z.* Consensus conditions for general second-order multi-agent systems with communication delay // *Automatica.* 2017. V. 75. P. 293–298.
18. *Hara S., Hayakawa T., Sugatani H.* Stability analysis of linear systems with generalized frequency variables and its applications to formation control // 46-th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA, 2007. P. 1459–1466.
19. *Yang W., Bertozzi A.L., Wang X.* Stability of a second order consensus algorithm with time delay // 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008. P. 2926–2931.
20. *Yang W., Wang X., Shi H.* Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay // *Syst. Control Lett.* 2013. V. 62. No. 3. P. 269–276.
21. *Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M.* Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // *Proc. IEEE.* 2007. V. 95. No. 1. P. 215–233.
22. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2003. V. 48. No. 6. P. 988–1001.
23. *Olfati-Saber R.M., Murray R.M.* Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.

24. *Ren W., Beard R.W., Atkins E.M.* Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control // IEEE Control Syst. Magazine. 2007. V. 27. No. 2. P. 71–82.
25. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph theoretic methods in multiagent networks // Princeton: Princeton University Press, 2010.
26. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // АиТ. 2009. № 3. С. 136–151.  
*Chebotarev P.Y., Agaev R.P.* Coordination in multiagent systems and Laplacian spectra of digraphs // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 469–483.
27. *Rothblum G.* Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius // Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization, II. Springer, Berlin, Heidelberg. 1976. Vol. 6. P. 188–201.
28. *Hara T., Sugie J.* Stability region for systems of differential-difference equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1996. V. 39. No. 1. P. 69–86.
29. *Seuret A., Dimarogonas D.V., Johansson K.H.* Consensus under communication delays // 47th IEEE Conference on Decision and Control. 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008. P. 4922–4927.
30. *Hayes N.D.* Roots of the transcendental equations associated with a certain differential-difference equation // J. London Math Soc. 1950. V. 1. No. 3. P. 226–232.
31. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Остовные леса орграфа и их применение // АиТ. 2001. № 3. С. 108–133.  
*Agaev R.P., Chebotarev P.Y.* Spanning forests of a digraph and their applications // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 3. P. 443–466.
32. *Chebotarev P., Agaev R.* The Forest Consensus Theorem // IEEE Trans. Automat. Control. 2014. V. 59. No. 9. P. 2475–2479.
33. *Поляк В.Т., Цыпкин Я.З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // АиТ. 1996. № 11. С. 91–104.  
*Polyak V.T., Tsypkin Ya.Z.* Stability and Robust Stability of Uniform Systems // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 11. P. 1606–1617.
34. *Hara S., Tanaka H., Iwasaki T.* Stability analysis of systems with generalized frequency variables // IEEE Trans. Autom. Control. 2013. V. 59. No. 2. P. 313–326.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.*

Поступила в редакцию 31.08.2023

После доработки 28.03.2024

Принята к публикации 30.04.2024



© 2024 г. Л.М. БЕРЛИН (berlin.lm@phystech.edu),  
А.А. ГАЛЯЕВ, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru),  
П.В. ЛЫСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (pavellysen@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА И МЕТОД НЕЙШТАДТА–ИТОНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ГРУППОЙ НЕСИНХРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ<sup>1</sup>

Рассматривается задача оптимального управления группой, состоящей из произвольного числа несинхронных осцилляторов с общим скалярным управляющим воздействием, по критерию быстродействия. Проведено аналитическое исследование задачи. Доказано свойство сильной достижимости и глобальной управляемости, найдено программное управление, которое переводит систему из начала координат в фиксированную точку по критерию быстродействия. Для перевода группы осцилляторов в состояние покоя найдены траектории, удовлетворяющие как уравнениям движения системы, так и дополнительным уравнениям, полученным на основе матричных условий невырожденности релейного управления. Проведено сравнение классификаций траекторий по количеству переключений управления, найденных с использованием необходимых условий экстремума и численного алгоритма Нейштадта–Итона.

*Ключевые слова:* принцип максимума Понтрягина, оптимальное управление, несинхронные осцилляторы, итерационный процесс Итона, уравнение Нейштадта, сильная достижимость, глобальная управляемость, геометрическая теория управления.

DOI: 10.31857/S0005231024060071, EDN: XWRNLI

### 1. Введение

В 60-х годах XX в. американские математики Итон и Нейштадт предложили итерационный метод [1, 2] поворота опорной гиперплоскости для поиска решения задачи оптимального управления (ЗОУ) по критерию быстродействия на основе идей выпуклого программирования. Итерационный алгоритм позволяет вычислить начальный вектор сопряженной системы, который используется для определения оптимальной траектории исходной системы, удовлетворяющей заданным граничным условиям, и применим в случае выпуклого множества достижимости. Одна из проблем указанного подхода заключается в том, что одному стартовому состоянию системы может соответствовать бесконечное количество неколлинеарных между собой начальных

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта молодежных научных школ Института проблем управления РАН 2023–2025.

векторов сопряженной системы [3], что существенно влияет на сходимость алгоритма. В [4] подчеркивается, что сходимость приведенного алгоритма возможна только в случае, когда область достижимости обладает свойством строгой выпуклости. Проверка указанного свойства не представляется возможной для нелинейных задач. В свою очередь, для управляемых линейных систем выпуклость множества достижимости следует из компактности и выпуклости множества допустимых управлений [5]. Линейная задача быстрогодействия для системы несинхронных осцилляторов с выпуклым множеством допустимых управлений обладает необходимым свойством строгой выпуклости множества достижимости. Способ учета неопределенности в выборе шага алгоритма Нейштадта–Итона, от которого существенно зависит скорость сходимости, предлагается в [6]. Предложение по улучшению сходимости метода было рассмотрено в [7]. Еще один итерационный метод минимакса на основе функции Минковского представлен в [8], где приведена интерпретация вышеуказанных методов в сопряженном пространстве. Итерационный алгоритм расчета оптимального по быстрдействию решения для линейных систем на основе принципа максимума приводится в [9]. Вопросам сходимости численных методов в оптимизационных задачах были посвящены ранние работы Б.Т. Поляка, например [10].

Другие методы нахождения приближенных решений задач быстрогодействия для линейных систем разнообразны и представляют определенный интерес с точки зрения широты используемых подходов. Методы поиска управления в реальном времени, основанные на идее предварительной аппроксимации областей достижимости и вычисления начального вектора сопряженной системы в процессе управления, рассмотрены в [11]. Симплексные покрытия выпуклой оболочки множества достижимости лежат в основе итерационного алгоритма, использование которого предлагается в работе для поиска минимального времени движения линейной [12] и нелинейной [13] управляемых систем, такого что начало координат будет принадлежать границе области достижимости. Техника инвариантных эллипсоидов, развитая Б.Т. Поляком и его соавторами [14], является основой для построения эффективных оценок множества достижимости систем с внешними возмущениями.

Для задачи успокоения произвольного числа линейных осцилляторов с общим скалярным управлением в [15] было получено асимптотическое оптимальное управление в форме синтеза, где объединяются несколько подходов. Первая идея заключается в использовании нормали к приближенной области достижимости как начального вектора для сопряженных переменных при больших энергиях. Использование управления с уменьшенной верхней границей позволяет системе достичь малой окрестности нуля. И наконец, метод обобщенных функций Ляпунова применяется для построения синтеза в окрестности терминального положения. Для платформы с произвольным количеством линейных осцилляторов исследована структура управления [16], представленная единственной внешней ограниченной силой.

Данная статья посвящена задаче ограниченного скалярного управления группой несинхронных осцилляторов по критерию быстродействия, для которой, насколько известно авторам, алгоритм Нейштадта–Итона не применялся. Поэтому возникла идея сравнить аналитические результаты, полученные ранее для двух несинхронных осцилляторов в части разбиения плоскости начальных значений первого осциллятора по классам управлений [17], а также распространить алгоритм на группу, состоящую из большего числа осцилляторов [18].

Статья состоит из введения, шести разделов, заключения и имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится постановка задачи оптимального управления для системы  $N$  несинхронных осцилляторов по критерию быстродействия с ограниченным скалярным управлением. Раздел 3 рассматривает вопросы управляемости системы, а именно связывает управления, переводящие на границу множества достижимости, с управлениями, переводящими систему в начало координат. В разделе 4 согласно принципу максимума Понтрягина получено оптимальное управление, содержащее в качестве неизвестных параметров константы из фундаментального решения сопряженной системы. В разделе 5 приводятся необходимые условия экстремума в виде нелинейных матричных равенств. В разделе 6 описывается применение численной процедуры Нейштадта–Итона для поиска начального вектора сопряженной системы для построения приближенного к оптимальному управления. Полученные результаты иллюстрируются моделированием в разделе 7. После чего в заключении 8 формируются планы дальнейшей работы.

## 2. Постановка задачи оптимального управления группой осцилляторов

Рассматривается линейная задача оптимального управления для  $N$  несинхронных осцилляторов, связанных ограниченным скалярным управлением [18]. Динамика управляемой системы описывается следующими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t), \\ \dot{p}_i(t) = -\omega_i^2 q_i(t) + u(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\omega_j \neq \omega_k, \quad \forall j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{x}(t) = (q_1(t), p_1(t), \dots, q_N(t), p_N(t))^T \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Компоненты  $q_i(t), p_i(t)$  вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$  являются координатой и импульсом  $i$ -го осциллятора с частотой колебаний  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Область значений управления  $\mathbb{U}$  задается отрезком на прямой:

$$(2) \quad u(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon] = \mathbb{U}.$$

Система (1) может быть переписана в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t),$$

где  $A$  – матрица системы,  $B$  – матрица управления:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Целью управления является перевод системы (1) из заданного положения в начало координат

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)^T, \\ \mathbf{x}(T^0) &= \mathbf{x}_{T^0} = (0, 0, \dots, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Время движения системы  $T^0$  – критерий задачи быстродействия

$$(4) \quad T^0[u] = \int_0^{T^0} dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathbb{U}}.$$

Для системы (1)–(3) в следующем разделе будет исследована задача управляемости с применением аппарата геометрической теории управления [19].

### 3. Решение задачи управляемости

Для изучения вопроса управляемости системы (1) с ограничениями (2) перепишем ее как систему векторных полей:

$$(5) \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}, u) = \{f_1 + u f_2 \mid u \in \mathbb{U}\},$$

$$(6) \quad \begin{aligned} f_1 &= p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + p_N \frac{\partial}{\partial q_N} - \omega_1^2 q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - \dots - \omega_N^2 q_N \frac{\partial}{\partial p_N} = \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \omega_i^2 q_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \end{aligned}$$

$$(7) \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial p_N} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

*Определение 1.* Линейная система  $(A, B, \mathbb{U})$  обладает свойством сильной достижимости, если множество достижимости в ненулевой момент времени имеет непустую внутренность из любого начального состояния системы.

Свойство сильной достижимости для системы (1)–(2) устанавливается из теоремы Суссмана–Джарджевича [20].

*Теорема 1 (Сусман–Джарджевич). Аналитическая система  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  обладает свойством сильной достижимости из точки  $x$  тогда и только тогда, когда размерность идеала алгебры Ли, порожденного системой, совпадает с размерностью пространства состояний*

$$(8) \quad \dim \mathcal{L}_0(x) = 2N.$$

*Лемма 1. Система (1) с ограничениями (2) является сильно достижимой.*

*Доказательство.* Приводится вычисление всех ненулевых векторных полей для последующего определения размерности идеала алгебры Ли.

$$f_3 = [f_1, f_2] = - \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i},$$

где введены обозначения:

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$f_4 = [f_1, f_3] = - \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 \\ \dots \\ 0 \\ -\omega_N^2 \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial}{\partial p_i},$$

$$f_5 = [f_1, f_4] = - \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 \\ \dots \\ 0 \\ -\omega_N^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ 0 \\ \dots \\ \omega_N^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial}{\partial q_i},$$

$$f_6 = [f_1, f_5] = - \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ 0 \\ \dots \\ \omega_N^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1^4 \\ \dots \\ 0 \\ \omega_N^4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \omega_i^4 \frac{\partial}{\partial p_i},$$

...

$$f_{2N} = [f_1, f_{2N-1}] = (-1)^{N-1} \sum_{i=1}^N \omega_i^{2N-2} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad N \geq 1,$$

$$f_{2N+1} = [f_1, f_{2N}] = (-1)^N \sum_{i=1}^N \omega_i^{2N-2} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad N \geq 1.$$

Система  $2N$  векторных полей  $\{f_2, f_3, \dots, f_{2N}, f_{2N+1}\}$  является линейно независимой, что устанавливается из определителя

$$(9) \quad \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \omega_1^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_1^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_1^{2N-2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_2^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_2^{2N-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \omega_N^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_N^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_N^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_N^{2N-2} & 0 \end{pmatrix},$$

который посредством элементарных преобразований приводится к определителю блочно-диагональной матрицы

$$(10) \quad \det \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = (\det(W))^2 = \left( \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right)^2 \neq 0$$

в силу системы (1), что, с опорой на теорему 1, заканчивает доказательство леммы. При вычислении определителя была введена матрица

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2N-2} \\ 1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{2N-2} \\ 1 & \omega_3^2 & \dots & \omega_3^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{2N-2} \end{pmatrix},$$

которая совпадает с матрицей Вандермонда, свойство определителя которой и было использовано в (10) [16].

*Определение 2.* Линейная система  $(A, B, \mathbb{U})$  называется глобально управляемой в нуле, если для любого начального условия  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2N}$  существует управление  $u \in \mathbb{U}$  такое, что соответствующая траектория достигает точки  $\mathbf{x}(T^0) = 0$  для некоторого  $T^0 \in [t_0, \infty)$ .

На вопрос о глобальной управляемости линейной системы в нуле при наличии ограничений на управление отвечает теорема из [21].

*Теорема 2* (ЛаСалль, Конти). Автономная система  $(A, B, \mathbb{U})$  при  $\mathbb{U} \in \mathbb{R}^m$  и  $\text{int} \mathbb{U} \neq \emptyset$  глобально управляема в нуле тогда и только тогда, когда:

- 1)  $\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ .
- 2)  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$  для каждого собственного значения  $\lambda_i$  матрицы  $A$ .

*Лемма 2.* Система (1) с ограничением (2) является глобально управляемой (вполне управляемой).

*Доказательство.* Первое условие теоремы 2 эквивалентно условию (8) теоремы 1. Кроме того, для системы (1)  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ . Таким образом, теорема 2 выполнена и система (1) является глобально управляемой в нуле.

Докажем свойство глобальной управляемости с помощью конкретного построения, используя общее решение дифференциального уравнения (1) с начальным состоянием  $(q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$ .

$$(11) \quad \begin{cases} q_i(t) = \frac{p_i^*}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + q_i^* \cos(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \sin(\omega_i(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ p_i(t) = p_i^* \cos(\omega_i t) - q_i^* \omega_i \sin(\omega_i t) + \int_0^t \cos(\omega_i(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \end{cases} \\ i = 1, \dots, N.$$

Управляемость в нуле гарантирует существование управления  $u(t)$  такого, что в некоторый момент  $t_1$  вектор состояния  $x(t_1)$  совпадет с началом координат.

$$(12) \quad \begin{cases} -\frac{p_i^*}{\omega_i} \sin(\omega_i t_1) - q_i^* \cos(\omega_i t_1) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_1} \sin(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ -p_i^* \cos(\omega_i t_1) + q_i^* \omega_i \sin(\omega_i t_1) = \int_0^{t_1} \cos(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \end{cases} \\ i = 1, \dots, N.$$

Покажем связь между управлением  $u(t)$  и управлением  $u_0(t)$ , переводящим систему из начала координат в точку  $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$  за время  $t_0$ . Такое решение представляется в виде

$$(13) \quad \begin{cases} q_i^* = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_0} \sin(\omega_i(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \\ -p_i^* = \int_0^{t_0} \cos(\omega_i(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

Подставляя (13) в (12), получим:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_0} \sin(\omega_i(t_1 - t_0 + \tau)) u_0(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_1} \sin(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ \int_0^{t_0} \cos(\omega_i(t_1 - t_0 + \tau)) u_0(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} \cos(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \end{cases} \\ i = 1, \dots, N.$$

Выбирая  $t_1 = t_0$ ,  $u(t) = u_0(t_1 - t)$ , получаем, что система обладает свойством глобальной управляемости в силу произвольности  $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$ .

*Замечание 1.* Управляемое состояние  $(q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$ , откуда начало координат достигается с управлением  $u(t)$  за время  $t_0$ , соответствует достижимому состоянию  $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$  с управлением  $u(t)$ , взятым в обратном времени за то же самое время.

#### 4. Уравнения принципа максимума

Далее приводятся утверждения принципа максимума Понтрягина (ПМП) для исследования задачи оптимального управления (1)–(4).

а) Гамильтониан задачи оптимального управления

$$(15) \quad \begin{aligned} h_u &= -\lambda_0 + \xi_1 p_1 + \eta_1(-\omega_1^2 q_1 + u) + \dots + \xi_N p_N + \eta_N(-\omega_N^2 q_N + u) = \\ &= -\lambda_0 + \sum_{i=1}^N \xi_i p_i + \eta_i(-\omega_i^2 q_i + u), \quad -\lambda_0 > 0, \end{aligned}$$

где  $\psi(t) = (\xi_1(t), \eta_1(t), \dots, \xi_N(t), \eta_N(t))^T$  – вектор сопряженных переменных, а  $\lambda_0$  – константа.

б) Гамильтонова система, состоящая из уравнений динамики (1) и сопряженной системы:

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_i} = \omega_i^2 \eta_i(t), \\ \dot{\eta}_i(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial p_i} = -\xi_i(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

в) Условие максимума:

$$(17) \quad h_{u^*} = \max_{u(\cdot) \in \mathbb{U}} h_u = -\lambda_0 + \sum_{i=1}^N (\xi_i p_i - \eta_i \omega_i^2 q_i) + u^* \sum_{i=1}^N \eta_i.$$

Сопряженная система (16) и ее решение, содержащее  $2N$  неизвестных постоянных коэффициентов:

$$(18) \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) = -\omega_1^2 \eta_1(t), \\ \dots \\ \ddot{\eta}_N(t) = -\omega_N^2 \eta_N(t); \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = C_1^1 \cos \omega_1 t + C_1^2 \sin \omega_1 t, \\ \dots \\ \eta_N = C_N^1 \cos \omega_N t + C_N^2 \sin \omega_N t. \end{cases}$$

Оптимальное управление  $u^*$  определяется из условия максимума (17):

$$(19) \quad u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign} \sum_{i=1}^N \eta_i = \varepsilon \operatorname{sign} \left( \sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t + C_i^2 \sin \omega_i t \right).$$

В следующем разделе будут выведены необходимые условия экстремума для системы  $N$  несинхронных осцилляторов, которые позволят исследовать решение задачи в любом заданном классе переключений релейного управления (19).



## 5. Необходимые условия экстремума

Управление  $u^*(t)$  согласно (19) является релейным. Переключения управления происходят в моменты времени  $t_m$ ,  $m = \overline{1, K-1}$ . Пусть  $\tau_n$  – длительности  $n$ -го интервала постоянства управления,  $n = \overline{1, K}$ . Тогда  $u^*(t)$  с  $K-1$  переключением и  $K \in \mathbb{N}$  интервалами постоянства управления имеет вид с точностью до знака, представленный на рис. 1. Такое управление будем относить к классу с  $(K-1)$ -м переключением управления. Учитывая вид оптимального управления  $u^*(t)$ , можно записать решение (1)–(3) при различных значениях  $K$ . Стоит также отметить, что управление на первом интервале может быть выбрано как  $\varepsilon$ , так и  $-\varepsilon$ , для чего вводится параметр  $s$ , равный 0 и 1 соответственно.

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left( \omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \cos \left( \omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) = \\ = (-1)^{K-1} + (-1)^s \frac{\omega_i^2}{\varepsilon} \left( \frac{p_i^*}{\omega_i} \sin \omega_i T^0 + q_i^* \cos \omega_i T^0 \right), \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left( \omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \sin \left( \omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) = \\ = (-1)^s \frac{\omega_i}{\varepsilon} \left( -p_i^* \cos \omega_i T^0 + q_i^* \omega_i \sin \omega_i T^0 \right), \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, N.$$

*Замечание 2.* Система (20), состоящая из  $2N$  уравнений, дает возможность исследовать класс  $2N-1$  переключений, для которого требуется определить длительности  $2N$  интервалов.

*Замечание 3.* Решение системы (20), отвечающее управлению  $u^*(t)$  для начального вектора  $x_0 = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)^T$ , соответствует  $-u^*(t)$  для  $-x_0 = (-q_1^*, -p_1^*, \dots, -q_N^*, -p_N^*)^T$ .

Для исследования классов управлений с большим количеством переключений приводятся следующие необходимые условия экстремума, аналогичные условиям для двух осцилляторов, полученным в [17].

*Лемма 3* (необходимые условия экстремума). *Всякое решение задачи (1)–(4) в классе кусочно-непрерывных управлений (19) удовлетворяет систе-*

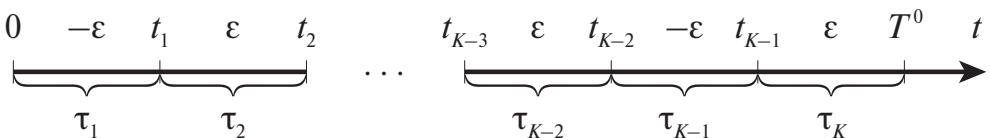


Рис. 1. Вид оптимального управления  $u^*(t)$ .

ме уравнений (20) и дополнительным  $K - 2N$  уравнениям:

$$(21) \quad \det \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_s) & \cos(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_1 t_s) & \sin(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \cos(\omega_N t_s) & \cos(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_N t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_N t_s) & \sin(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_N t_{s+2N-1}) \end{pmatrix} = 0, \\ s = 1, \dots, K - 2N.$$

*Доказательство.* Переключение оптимального релейного управления в моменты  $t_m$ ,  $m = 1, \dots, K - 1$  приводит к обнулению (19):

$$(22) \quad \sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t_m + C_i^2 \sin \omega_i t_m = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1.$$

Для компактности запишем все уравнения (22) в матричном виде, а именно,

$$(23) \quad (\mathbf{C}, \mathbf{\Omega}_m) = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1,$$

где

$$\mathbf{C} = (C_1^1, C_1^2, \dots, C_N^1, C_N^2), \quad \mathbf{\Omega}_m = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_m) \\ \sin(\omega_1 t_m) \\ \dots \\ \cos(\omega_N t_m) \\ \sin(\omega_N t_m) \end{pmatrix}.$$

Полученные уравнения (23) перепишем следующим образом:

$$(24) \quad \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_1 t_2) & \dots & \cos(\omega_1 t_{K-2}) & \cos(\omega_1 t_{K-1}) \\ \sin(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_2) & \dots & \sin(\omega_1 t_{K-2}) & \sin(\omega_1 t_{K-1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \cos(\omega_N t_1) & \cos(\omega_N t_2) & \dots & \cos(\omega_N t_{K-2}) & \cos(\omega_N t_{K-1}) \\ \sin(\omega_N t_1) & \sin(\omega_N t_2) & \dots & \sin(\omega_N t_{K-2}) & \sin(\omega_N t_{K-1}) \end{pmatrix}^T \times \\ \times \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \\ \dots \\ C_N^1 \\ C_N^2 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Условие существования нетривиального вектора  $\mathbf{C}$  эквивалентно  $K - 2N$  уравнениям вида

$$(25) \quad \det(\mathbf{\Omega}_s, \mathbf{\Omega}_{s+1}, \dots, \mathbf{\Omega}_{s+2N-1}) = 0, \quad s = 1, \dots, K - 2N.$$

В следующем разделе будет приведен способ нахождения оптимального решения, основанный на методе Нейштадта–Итона [3].

## 6. Численный алгоритм поиска начального значения сопряженного вектора

Неизвестные постоянные коэффициенты  $\mathbf{C}$ , входящие в оптимальное управление (19), однозначно вычисляются по начальному вектору  $\boldsymbol{\psi}(0) = (\xi_1(0), \eta_1(0), \dots, \xi_N(0), \eta_N(0))^T$  для сопряженной системы уравнений (16) по следующему правилу:

$$(26) \quad \begin{aligned} \mathbf{C} &= (C_1^1, C_1^2, \dots, C_N^1, C_N^2) = \\ &= \left( \eta_1(0), -\frac{\xi_1(0)}{\omega_1}, \dots, \eta_N(0), -\frac{\xi_N(0)}{\omega_1} \right). \end{aligned}$$

Введем множество  $H_*$ , которое состоит из векторов  $\boldsymbol{\psi}(0)$  и определяет удовлетворяющие граничным условиям (3) траектории  $\mathbf{x}(t)$  системы (1).

Поиск  $\boldsymbol{\psi}(0)$ , основанный на итерационном алгоритме Нейштадта–Итона, приводится в виде последовательности шагов [3].

**Инициализация.** Задается  $\mathbf{x}_0$  – фиксированный начальный вектор в (3). Выбирается начальный нормированный вектор  $\boldsymbol{\psi}_0 = (\xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)}, \eta_N^{(0)})^T = -\frac{\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|}$ .

*Замечание 4.* За начальный вектор  $\boldsymbol{\psi}_0$  можно принять любой вектор, расположенный в полупространстве  $D$ , которое определяется гиперплоскостью, ортогональной вектору  $\mathbf{x}_0$ .

Вводятся следующие величины:

$$(27) \quad I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) = \begin{pmatrix} \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} \left( \frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1} \right) \varepsilon \operatorname{sign} \left( \sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ - \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} (\cos \omega_1 \tau) \varepsilon \operatorname{sign} \left( \sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ \dots \\ \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} \left( \frac{\sin \omega_N \tau}{\omega_N} \right) \varepsilon \operatorname{sign} \left( \sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ - \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} (\cos \omega_N \tau) \varepsilon \operatorname{sign} \left( \sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \end{pmatrix},$$

где  $\boldsymbol{\psi}_h = (\xi_1^{(h)}, \eta_1^{(h)}, \dots, \xi_N^{(h)}, \eta_N^{(h)})^T$  – вектор, построенный на  $h$ -м ( $h = 0, 1, \dots$ ) шаге алгоритма.  $F(\boldsymbol{\psi}_h)$  определяется как решение уравнения

$$(28) \quad \langle \boldsymbol{\psi}_h, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) \rangle = 0.$$

**Шаг 1.** Следующий вектор  $\boldsymbol{\psi}_1$  определяется в соответствии с уравнениями:

$$(29) \quad \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)} &= \boldsymbol{\psi}_0 - 2^{-m}(\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_0)), \\ \boldsymbol{\psi}_1 &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)}}{|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)}|}, \end{aligned}$$

при этом выбирается наименьшее из неотрицательных целых чисел  $m$ , для которых вектор  $\boldsymbol{\psi}_1$  удовлетворяет неравенству

$$(30) \quad \langle \boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_1) \rangle < -\frac{|\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_0)|^2}{2^{m+1}}.$$

**Шаг 2.** Предполагая, что в этой же области индуктивно построены векторы  $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_h$ , следующий вектор  $\boldsymbol{\psi}_{h+1}$  определяется как

$$(31) \quad \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)} &= \boldsymbol{\psi}_h - 2^{-m}(\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)), \\ \boldsymbol{\psi}_{h+1} &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)}}{|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)}|}, \end{aligned}$$

при этом выбирается наименьшее из неотрицательных целых чисел  $m$ , для которых вектор  $\boldsymbol{\psi}_{h+1}$  удовлетворяет неравенству

$$(32) \quad \langle \boldsymbol{\psi}_{h+1}, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_{h+1}) \rangle < -\frac{|\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)|^2}{2^{m+1}}.$$

Тогда либо  $\boldsymbol{\psi}_h \in H_*$  для некоторого  $h$ , либо построение приводит к бесконечной последовательности векторов  $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots$ , лежащих в полупространстве  $D$  и обладающих следующими свойствами:

- 1) числа  $F(\boldsymbol{\psi}_0), F(\boldsymbol{\psi}_1), F(\boldsymbol{\psi}_2), \dots$  образуют монотонно возрастающую последовательность, сходящуюся к числу  $T^0$ ;
- 2)  $\lim_{h \rightarrow \infty} I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) = \mathbf{x}_0$ ;
- 3) последовательность векторов  $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots$  приближается к множеству  $H_*$ .

*Замечание 5.* О нахождении решения уравнения (28).

Функция  $\langle \boldsymbol{\psi}_h, \mathbf{x}_0 - I_t(\boldsymbol{\psi}_h) \rangle$  является непрерывной по переменным  $\boldsymbol{\psi}_h, t$ . При любом фиксированном  $\boldsymbol{\psi}_h$  она монотонно возрастает по  $t$  [3]. Поэтому решение уравнения (28) определяется через построение значений указанной функции для возрастающей последовательности  $F(\boldsymbol{\psi}_h)$  с использованием метода бисекции и численного интегрирования.

## 7. Моделирование

Для демонстрации результатов, полученных в разделах 5, 6, приводится расчет оптимального управления для системы двух несинхронных осцилляторов ( $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1,4$ ) с использованием как необходимых условий экстремума, так и метода Нейштадта–Итона. Здесь и далее для ограничения на управление выберем значение  $\varepsilon = 0,4$ .

Рассматривается множество начальных состояний системы  $x_0 = (q_1^*, p_1^*, 0, 0)^T$ , где  $|q_1^*| < 2,2$ ,  $|p_1^*| < 1,5$  (множество управляемости). Для классов трех ( $K = 4$ ) и четырех ( $K = 5$ ) переключений производится поиск решений в соответствии с леммой 3. Каждое полученное решение проверяется на соответствие тому классу переключения, в рамках которого оно было найдено. В соответствии с замечанием 3 исследовать нужно только половину рассматриваемой области. Результат в виде размеченного множества управляемости, куда также включен класс двух переключений, аналитическое описание которого можно найти в работе авторов [22], представлен на рис. 2. Количество переключений управления отмечено на графике числами. Изображенные плюсами и минусами точки соответствуют управлениям со значением

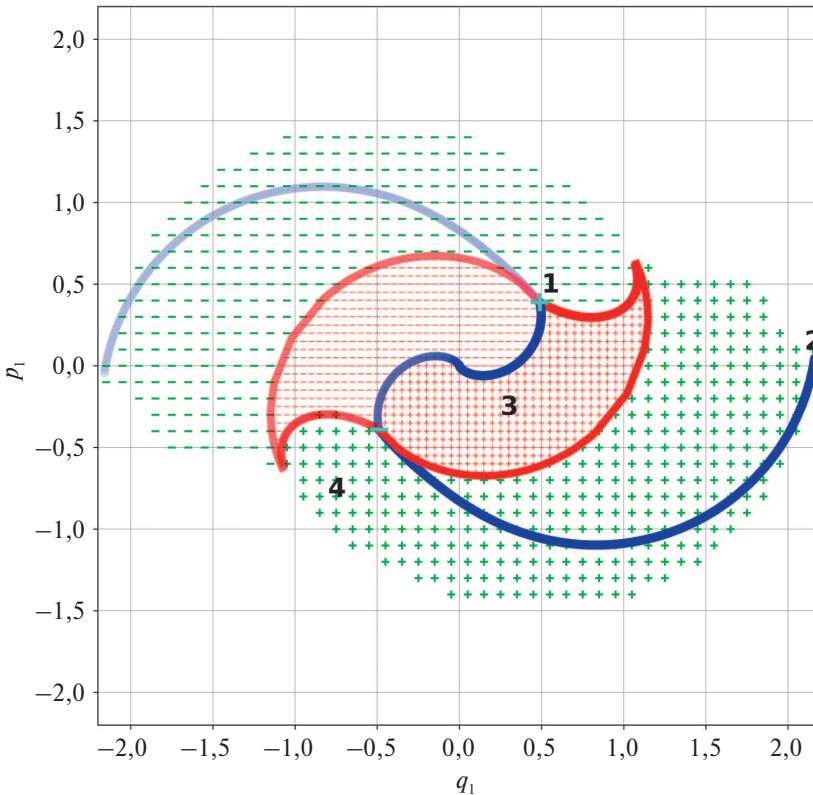


Рис. 2. Множество управляемости первого осциллятора (лемма 3).

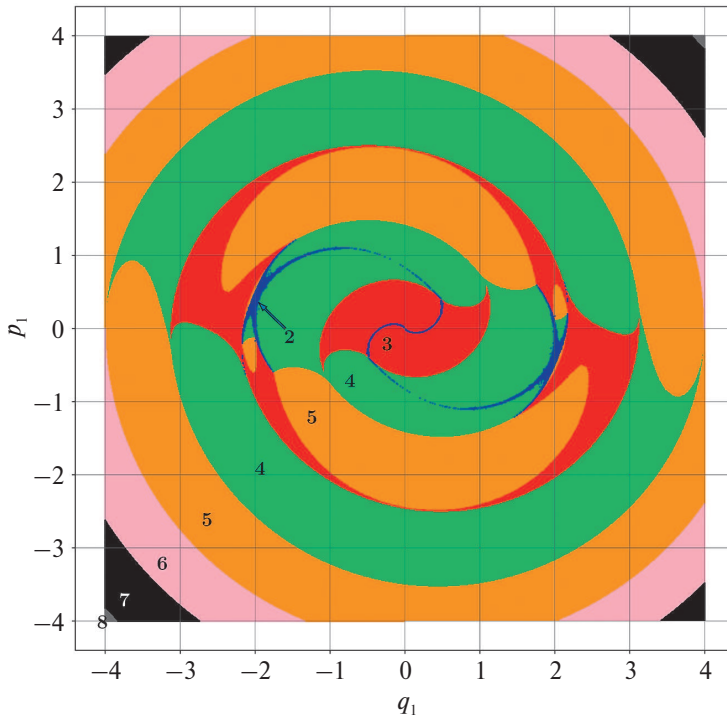


Рис. 3. Множество управляемости первого осциллятора (метод Нейштадта–Итона).

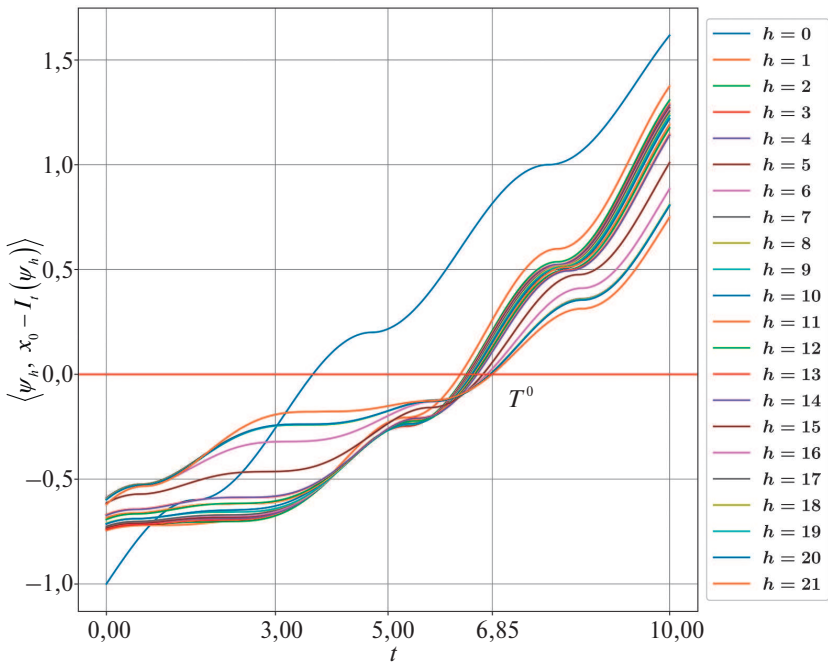


Рис. 4. График уравнений (28) для различных значений  $h$ .

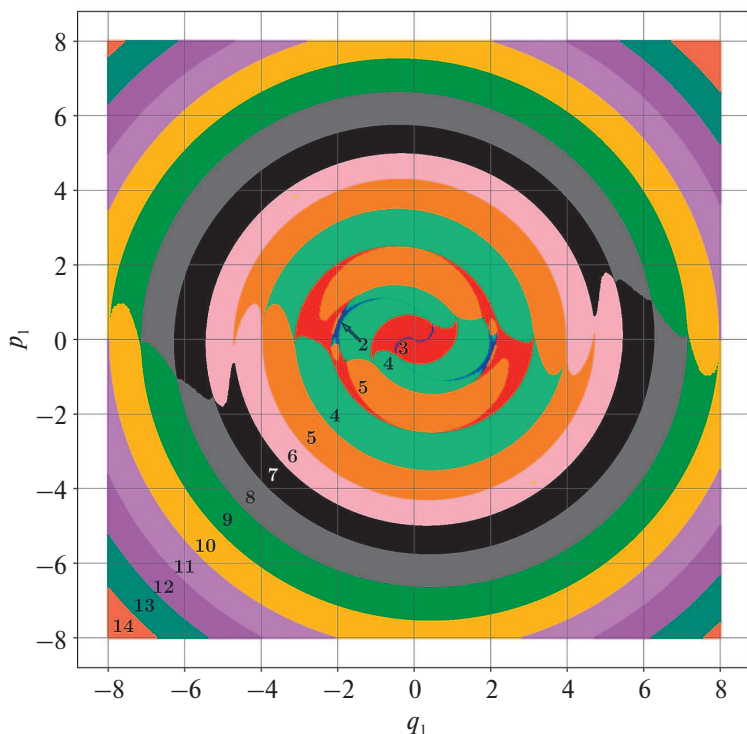


Рис. 5. Множество управляемости первого осциллятора.

$\varepsilon$  и  $-\varepsilon$  на первом интервале соответственно. Кривым двух переключений с высокой прозрачностью отвечают управления, принимающие отрицательные значения на первом интервале. Отмечаются следующие особенности предлагаемого подхода: отсутствие информации о допустимости использования того или иного класса управления для конкретного начального условия, что приводит к необходимости исследования различных  $K$ , сложность поиска решения системы нелинейных уравнений порядка  $K$ . Однако указанный метод позволяет исследовать случаи различных вырождений, как например, класс двух переключений, и получать аналитические конструкции для формирования границ классов, чему и отвечают синие и красные кривые на рис. 2.

На рис. 3 приводится классифицированная плоскость первого осциллятора, полученная с использованием метода Нейштадта-Итона. Основными параметрами при нахождении нового приближения  $\psi_h$  были точность определения корня уравнения (28) и ограничение на величину ошибки, определяемой как евклидово расстояние от конца найденной траектории до начала координат. Каждое новое найденное значение  $F(\psi_h)$  используется в качестве начального приближения для определения  $F(\psi_{h+1})$  в силу монотонного возрастания чисел  $F(\psi_0), F(\psi_1), \dots$ . Сказанное иллюстрируется на рис. 4, где представлен график функций  $\langle \psi_h, \mathbf{x}_0 - I_t(\psi_h) \rangle$  для различных  $h$  при выборе начального вектора  $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 0, 0)^T$ .

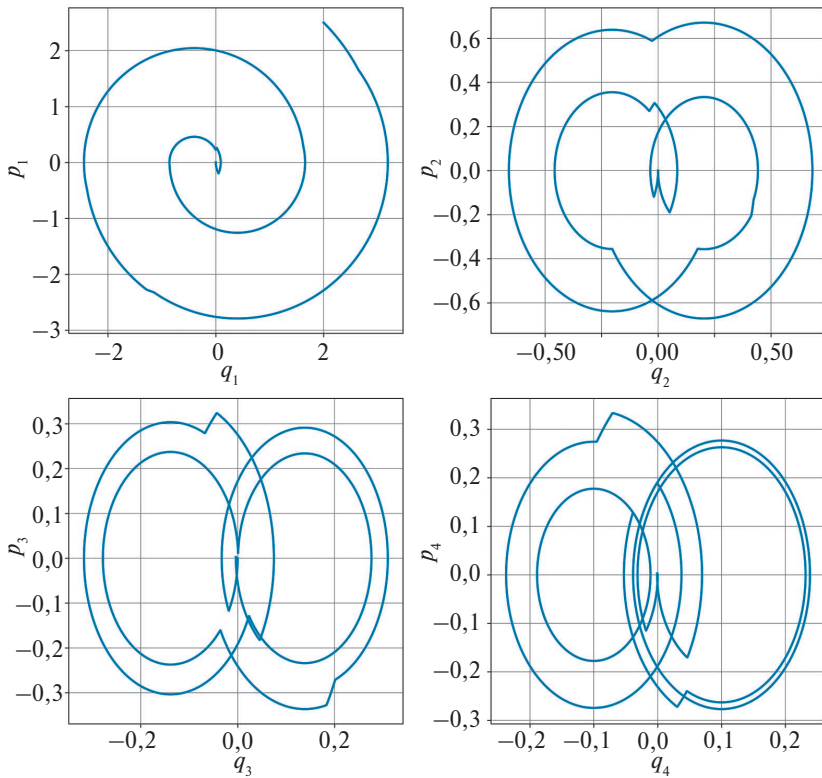


Рис. 6. Фазовые плоскости четырех осцилляторов.

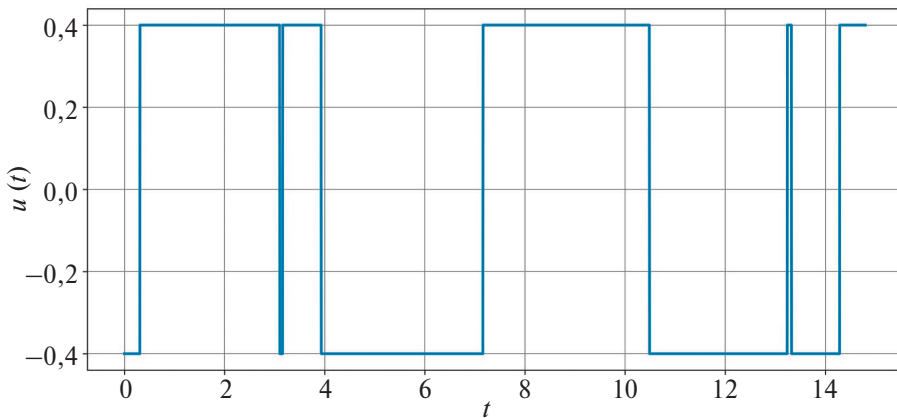


Рис. 7. Скалярное управление с девятью переключениями для системы четырех осцилляторов.

На рис. 5 приводится анализ большего множества управляемости, которое включает в себя 14 классов управления с учетом вырожденных классов одного и двух переключений. Количество переключений управления также отмечено на графике числами.



Для иллюстрации работы метода Нейштадта–Итона приводится пример для четырех несинхронных осцилляторов со следующими параметрами:

$$(33) \quad \varepsilon = 0,4, \quad \{\omega_i\}_{i=1}^4 = \{1, 1,4, 1,7, 2\}, \quad \mathbf{x}_0 = (2, 2,5, 0, \dots, 0, 0)^T.$$

В результате работы алгоритма были получены: начальный вектор сопряженной системы

$$\psi(0) = (-0,336, -0,372, -0,334, -0,149, -0,504, -0,158, -0,562, 0,141)$$

и критерий задачи  $T^0 = 14,795$ . Траектории движения осцилляторов приводятся на рис. 6 с общим скалярным управлением, отображенным на рис. 7.

Стоит отметить, что программная реализация алгоритма Нейштадта–Итона работает достаточно быстро и эффективно, задавая приближенную классификацию множества управляемости первого осциллятора по количеству переключений управления. Что, в свою очередь, определяет области значений констант фундаментального решения сопряженной системы для их поиска из необходимых условий экстремума.

## 8. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального управления группой несинхронных осцилляторов с одним скалярным управляющим воздействием по критерию быстродействия. Показана связь между множеством достижимости и управляемости. Для перевода группы осцилляторов в состояние покоя найдены траектории с помощью необходимых условий экстремума и с использованием итерационного алгоритма Нейштадта–Итона. Проведено сравнение полученных классификаций траекторий на основе количества переключений релейного управления. Результаты работы итерационного алгоритма, такие как класс переключений, оценка времени движения системы и моментов переключения, могут быть использованы в качестве начального приближения для поиска решения на основе необходимых условий экстремума.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eaton J.H.* An iterative solution to time-optimal control // *J. Math. Anal. Appl.* 1962. V. 5. No. 2. P. 329–344.
2. *Neustadt L.W.* Synthesizing time optimal control systems // *J. Math. Anal. Appl.* 1960. V. 1. P. 484–493.
3. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
4. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
5. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
6. *Пшеничный Б.Н.* Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1964. Т. 4. № 1. С. 52–60.
7. *Старов В.Г.* Улучшение сходимости метода Нейштадта–Итона // *Мат. зам. СВФУ.* 2019. Т. 26. № 1. С. 70–80. <https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.101.27248>

8. Рабинович А.Б. Об одном классе методов итерационного решения задач быстрогодействия // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 3. С. 433–445.
9. Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А. Ускоренный метод решения задачи линейного быстрогодействия // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 6. С. 1345–1352.
10. Поляк Б.Т. Сходимость методов возможных направлений в экстремальных задачах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 4. С. 855–869.
11. Александров В.М. Вычисление оптимального управления в реальном времени // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 10. С. 1778–1800.
12. Шевченко Г.В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстрогодействия // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 8. С. 1166–1178.
13. Шевченко Г.В. Метод численного решения нелинейной задачи оптимального быстрогодействия с аддитивным управлением // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 11. С. 1843–1854.
14. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
15. Овсеевич А.И., Федоров А.К. Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // Докл. РАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 266–270. <https://doi.org/10.7868/s0869565213280050>
16. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстроддействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т. 85. № 6. С. 699–718. <https://doi.org/10.31857/S0032823521060072>
17. Berlin L.M., Galyaev A. A., Lysenko P.V. Time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators // Mathematics. 2022. P. 3552. <https://doi.org/10.3390/math10193552>
18. Galyaev A.A. Scalar control of a group of free-running oscillators // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1511–1523. <https://doi.org/10.1134/S0005117916090010>
19. Сачков Ю.Л., Аграчев А.А. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
20. Wyrwas M. Strong accessibility and integral manifolds of the continuous-time nonlinear control systems // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 469. No. 2. P. 935–959. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.09.045>
21. Benzaid Z. Global null controllability of perturbed linear systems with constrained controls // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 136. No. 1. P. 201–216. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(88\)90126-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90126-6)
22. Берлин Л.М., Галеев А.А., Кравцова С.К. О классе двух переключений управления в задаче быстрогодействия двух несинхронных осцилляторов // УБС. 2023. Т. 101. С. 24–38. <https://doi.org/10.25728/ubs.2023.101.2>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)  
(Научно-технологический университет «Сириус», Сочи),  
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)  
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## КАК УЛУЧШИТЬ РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ С ПОМОЩЬЮ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ<sup>1</sup>

Показано, что робастное управление, построенное только по априорной информации о неопределенности в объекте, может быть значительно улучшено за счет дополнительного использования экспериментальных данных. Излагается синтез обобщенных  $H_\infty$ -управлений неизвестной линейной нестационарной системой на конечном горизонте, которые оптимизируют уровни гашения внешнего и/или начального возмущений, а также максимальное отклонение терминального состояния системы. Метод не требует выполнения условия неисчезающего возбуждения или рангового условия, гарантирующих идентифицируемость системы, что позволяет значительно уменьшить объем экспериментальных данных.

*Ключевые слова:* линейная нестационарная система, неопределенность, робастное управление, обобщенная  $H_\infty$ -норма, двойственность, условие неисчезающего возбуждения, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024060086, EDN: XWPXEE

### 1. Введение

В настоящее время в теории управления активно развиваются методы синтеза робастных законов управления с использованием данных, полученных в предварительном эксперименте. Традиционные методы базировались в основном на использовании только априорной информации. Применение экспериментальных данных значительно сужает множество объектов, выделяемых на основе априорной информации, что в конечном итоге позволяет синтезировать более качественное управление. Для систем с параметрической неопределенностью большое место занимают методы синтеза робастного управления, основанные на применении теории  $H_\infty$ -оптимального управления (см., например, обзор [1]). Основная идея, лежащая в основе этих методов, состоит в том, что исходная неопределенная система представляется в виде двух подсистем, связанных обратной связью: одна подсистема известна, а другая содержит матрицу неизвестных параметров объекта (в англоязычной литературе такая модель называется «linear fractional transformation model» или сокращенно «LFT model»). Дополнительные вход и выход известной подсистемы, являющиеся соответственно выходом и входом неизвестной подсистемы,

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-11-20023).

называются входом и выходом неопределенности. Если априорная информация выражается квадратичным неравенством относительно матрицы неизвестных параметров, то вход и выход неопределенности удовлетворяют соответствующему квадратичному неравенству. Таким образом, исходная система с параметрической неопределенностью «погружается» в известную систему, содержащую дополнительное возмущение из заданного класса и называемую далее расширенной. В итоге в качестве робастного управления, минимизирующего заданный функционал, выбирается соответствующее минимаксное управление для расширенной системы против внешнего и дополнительного возмущений.

В синтезе законов управления по экспериментальным данным предполагается, что возмущения в объекте или помехи в измерениях при проведении экспериментов принадлежат некоторому классу и имеют определенные границы. Это позволяет судить об области неопределенных параметров объекта, которые могли бы генерировать полученные данные. Однако непосредственное перенесение описанного выше синтеза робастного управления оказалось затруднительным, так как получаемое при использовании экспериментальных данных неравенство является квадратичным относительно транспонированной матрицы неизвестных параметров. Как будет показано далее, это препятствие можно обойти, если от исходной неопределенной системы перейти к двойственной системе и характеризовать оптимизируемый функционал в терминах двойственной системы.

В связи с возникшей трудностью появились новые подходы. В [2] робастное управление для линейных стационарных систем в отсутствие возмущений и помех в измерениях строится на основе параметризации в терминах экспериментальных данных множества всех матриц замкнутой системы, согласованных с экспериментальными данными. Этот подход в [3] распространяется для систем с возмущением, а в [4] – для линейных нестационарных систем с возмущением. В [5] необходимые и достаточные условия робастной стабилизации получены на основе леммы Питерсена [6]. В [7] показано, что робастное  $H_2$ -управление по экспериментальным данным при достаточно малых амплитудах возмущений может быть улучшено за счет компромисса между целями управления и идентификации, достигаемого путем регуляризации функционала.

К экспериментальным данным в этих работах предъявляются определенные требования: для стационарных систем матрица, составленная из измерений состояний и управлений по траектории системы, должна быть максимального строчного ранга, а для нестационарных систем матрицы, составленные из измерений состояний и управлений в нескольких экспериментах, в каждый момент времени также должны иметь максимальный строчный ранг. Для выполнения этого рангового условия требуется, чтобы входные сигналы в экспериментах обеспечили неисчезающее возбуждение в системе, а в нестационарных системах это еще и требует проведение достаточно боль-

шого числа экспериментов, необходимых для идентифицируемости неизвестных параметров.

В [8, 9] для стационарных систем без возмущений и с возмущениями получены необходимые и достаточные условия информативности экспериментальных данных по отношению к синтезируемому закону управления, при которых существует единая линейная стационарная обратная связь для всех объектов, согласованных с экспериментальными данными. Эти условия получены при использовании матричного варианта  $S$ -леммы [10] и выражены в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН), зависящих только от экспериментальных данных. Результаты математического моделирования, в том числе и приведенные в [9], показывают, что уже при сравнительно небольших амплитудах помех в измерениях указанные ЛМН дают довольно грубую оценку соответствующему показателю качества системы или даже оказываются неразрешимыми. Это происходит по причине того, что с ростом амплитуды помехи множество объектов, согласованных с экспериментальными данными, значительно расширяется. И хотя формально для обеспечения информативности данных не требуется исчезающее возбуждение в системе, указанное множество может стать неограниченным даже при небольших амплитудах помех, если для экспериментальных данных не выполняется ранговое условие. Таким образом, синтез робастного управления, опирающийся только на экспериментальные данные, как и синтез на основе только априорной информации, имеет свои достоинства и недостатки. Поэтому кажется естественным объединить эти подходы, пусть даже при возможной консервативности получаемых результатов.

Первая попытка в этом направлении была предпринята в [11], где параметры обратной связи по состоянию для линейных стационарных систем и некоторых классов нелинейных систем находятся при совместном использовании априорных и экспериментальных данных на основе так называемой теории множителей [12]. В [13, 14] для стационарных систем на бесконечном горизонте было показано, что традиционные методы синтеза робастного управления по априорной информации, основанные на теории  $H_\infty$ -оптимизации, могут быть применены в синтезе обобщенного  $H_\infty$ -оптимального управления по экспериментальным и априорным данным, если от исходной системы перейти к двойственной. Для этого требуется обобщенную  $H_\infty$ -норму характеризовать в терминах квадратичной функции Ляпунова для двойственной системы, представить уравнения двойственной неопределенной системы в виде LFT модели с соответствующими неравенствами для входа и выхода неопределенности и в качестве робастного управления выбрать обобщенное  $H_\infty$ -оптимальное управление для гашения внешнего и дополнительного возмущений в известной подсистеме этой модели.

В настоящей работе эта идея распространяется на анализ и синтез оптимальных законов управления для полностью неопределенных нестационарных систем на конечном горизонте. Целями управления являются минимизация уровней гашения внешнего и/или начального возмущений, измеряемых

наихудшими значениями отношений квадратичных по состояниям и управлениям функционалов к «энергии» соответствующих возмущений, а также максимальное отклонение терминального состояния, измеряемое наихудшим значением отношения квадратичной формы терминального состояния к энергии возмущений. Все эти показатели выражаются в терминах обобщенной  $H_\infty$ -нормы линейной нестационарной системы на конечном горизонте. В отличие от [4] здесь не требуется выполнения рангового условия, что позволяет значительно уменьшить объем экспериментальных данных. На примере уравнения Матье будет продемонстрировано, что синтез робастного управления нестационарной системой может быть осуществлен даже при измерении одной траектории на конечном горизонте. Это достигается за счет совместного использования экспериментальных данных и априорной информации, где последняя играет регуляризирующую роль в тех случаях, когда происходит вырождение информационных матриц и система оказывается неидентифицируемой.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Экспериментальные данные

Рассмотрим неопределенную систему

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A_t x(t) + B_t u(t) + w(t), & x(0) &= x_0, \\ z(t) &= C_t x(t) + D_t u(t), & t &= 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

в которой  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – состояние,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – управление,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – неизмеряемое возмущение,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  – целевой выход. Предполагается, что начальное состояние  $x_0$  и нестационарные матрицы системы  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $C_t$  и  $D_t$  неизвестны. В общем плане требуется на основе информации, полученной из экспериментов, и априорной информации синтезировать линейные обратные связи по состоянию, которые оптимизируют различные показатели качества замкнутой системы: уровень гашения начальных и/или внешних возмущений на конечном горизонте и на бесконечном горизонте для стационарных систем, максимальное отклонение терминального состояния и др.

Информация о неизвестных матрицах системы (2.1) извлекается из конечного набора измерений ее траектории при  $t = 0, \dots, N$  в результате проведения  $L \geq 1$  экспериментов. А именно, допустим, что в  $l$ -м эксперименте получены измерения состояния системы  $x_{0,l}, x_{1,l}, \dots, x_{N,l}$  и целевого выхода  $z_{0,l}, \dots, z_{N-1,l}$  при выбранных управлениях  $u_{0,l}, \dots, u_{N-1,l}$  и некоторых неизвестных возмущениях  $w_{0,l}, \dots, w_{N-1,l}$ . Для каждого  $t = 0, \dots, N$  обозначим матрицы

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi_t &= (x_{t,1} \cdots x_{t,L}), & U_t &= (u_{t,1} \cdots u_{t,L}), \\ W_t &= (w_{t,1} \cdots w_{t,L}), & Z_t &= (z_{t,1} \cdots z_{t,L}), \end{aligned}$$

которые содержат соответствующие данные всех экспериментов в каждый момент времени. В силу уравнения объекта для этих матриц выполняется

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Phi_{t+1} &= A_t^{(real)} \Phi_t + B_t^{(real)} U_t + W_t, \\ Z_t &= C_t^{(real)} \Phi_t + D_t^{(real)} U_t, \end{aligned}$$

где  $A_t^{(real)}$ ,  $B_t^{(real)}$ ,  $C_t^{(real)}$  и  $D_t^{(real)}$  – реальные неизвестные матрицы уравнений системы. Обозначим

$$\Delta_t^{(real)} = \begin{pmatrix} A_t^{(real)} & B_t^{(real)} \\ C_t^{(real)} & D_t^{(real)} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Phi}_t = \begin{pmatrix} \Phi_t \\ U_t \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi}_{t+1} = \begin{pmatrix} \Phi_{t+1} \\ Z_t \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_t = \begin{pmatrix} W_t \\ 0 \end{pmatrix}$$

и запишем уравнения (2.3) в виде линейной матричной регрессии

$$(2.4) \quad \widetilde{\Phi}_{t+1} = \Delta_t^{(real)} \widehat{\Phi}_t + \widehat{W}_t, \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Представим общее предположение о возмущении в экспериментах в виде условия  $\sum_{l=1}^L w_{t,l} w_{t,l}^T = W_t W_t^T \leq \Omega_t$ , т.е.

$$(2.5) \quad \widehat{W}_t \widehat{W}_t^T \leq \begin{pmatrix} \Omega_t & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\Omega}_t.$$

В частности, если  $\sum_{l=1}^L |w_{t,l}|^2 \leq \alpha_t^2$ , то  $\Omega_t = \alpha_t^2 I$ . Если для всех  $t$  возмущение удовлетворяет ограничению  $\|w(t)\|_\infty \leq d_w$  для некоторого заданного  $d_w$ , которое будем называть уровнем возмущения, то  $\Omega_t = d_w^2 n_x L I$ .

*Замечание 1.* Если в уравнении (2.1) возмущение представимо в виде  $w(t) = B_{v,t} v(t)$ , где  $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$  и  $\|v(t)\|_\infty \leq d_v$ , то  $\Omega_t = d_v^2 n_v L B_{v,t} B_{v,t}^T$ .

Далее, из (2.5) следует, что матрицы  $\Delta_t$  порядка  $(n_x + n_z) \times (n_x + n_u)$ , которые могли бы генерировать полученные в экспериментах матрицы  $\Phi_t$  и  $Z_t$  при выбранных управлениях  $U_t$  и некоторых матрицах  $\widehat{W}_t$ , удовлетворяющих ограничению (2.5), характеризуются неравенствами

$$(2.6) \quad (\widetilde{\Phi}_{t+1} - \Delta_t \widehat{\Phi}_t)(\widetilde{\Phi}_{t+1} - \Delta_t \widehat{\Phi}_t)^T \leq \widehat{\Omega}_t, \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Представим эти неравенства в виде

$$(2.7) \quad (\Delta_t \quad I_{n_x+n_z}) \Psi^{(1)}(t) (\Delta_t \quad I_{n_x+n_z})^T \leq 0, \quad t = 0, \dots, N-1,$$

где симметрические матрицы  $\Psi^{(1)}(t)$  порядка  $(2n_x + n_u + n_z) \times (2n_x + n_u + n_z)$  разбиваются на блоки  $\Psi_{ij}^{(1)}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$  соответствующего порядка и вычисляются следующим образом:

$$(2.8) \quad \Psi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}_t \widehat{\Phi}_t^T & | & \star \\ \hline - & - & - \\ -\widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^T & | & \widetilde{\Phi}_{t+1} \widetilde{\Phi}_{t+1}^T - \widehat{\Omega}_t \end{pmatrix}.$$



Обозначим через  $\Delta_t^{(p)}$  множество матриц  $\Delta_t$ , согласованных с результатами эксперимента, т.е. удовлетворяющих неравенству (2.7) для данного  $t$ .

Покажем, что множество  $\Delta_t^{(p)}$  является, вообще говоря, неограниченным, и выясним, при каких условиях оно будет ограниченным. Для этого обозначим через  $\text{Im}(\cdot)$ ,  $\text{Ker}(\cdot)$ ,  $\text{span}(\cdot)$  и  $\text{rank}(\cdot)$  образ, ядро, линейное подпространство столбцов и столбцовый ранг соответствующей матрицы. Допустим, что  $\text{rank } \hat{\Phi}_t = s \leq \min\{n_x + n_u, L\}$  и представим матрицу  $\hat{\Phi}_t$  в виде сингулярного разложения [15]

$$(2.9) \quad \hat{\Phi}_t = (F_1 F_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{s \times (L-s)} \\ 0_{(n_x+n_u) \times s} & 0_{(n_x+n_u) \times (L-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^T \\ G_2^T \end{pmatrix} = F_1 \Sigma G_1^T,$$

$$F_1 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times s}, \quad F_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u-s)}, \quad F = (F_1 F_2), \quad F^T F = I,$$

где  $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) > 0$ ,  $\lambda_i$  – собственные числа информационной матрицы  $\hat{\Phi}_t \hat{\Phi}_t^T$ ,  $\text{span } F_1 = \text{Im } \hat{\Phi}_t$ ,  $\text{span } F_2 = \text{Ker } \hat{\Phi}_t^T$ ,  $\text{span } G_1 = \text{Im } \hat{\Phi}_t^T$ ,  $\text{span } G_2 = \text{Ker } \hat{\Phi}_t$ . Выберем ортонормированный базис, состоящий из столбцов матрицы  $F$ , введем соответствующие переменные

$$\hat{\Delta}_t = \Delta_t (F_1 F_2) = \left( \hat{\Delta}_t^{(1)} \hat{\Delta}_t^{(2)} \right), \quad \hat{\Delta}_t^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_x \times s}, \quad \hat{\Delta}_t^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+n_u-n_y-s)}$$

и обозначим  $\hat{\Phi}_t^{(1)} = F_1^T \hat{\Phi}_t$ . Тогда линейная матричная регрессия (2.4) в новых переменных запишется как

$$(2.10) \quad \tilde{\Phi}_{t+1} = \hat{\Delta}_t^{(real)(1)} \hat{\Phi}_t^{(1)} + \widehat{W}_t, \quad t = 0, \dots, N-1,$$

где  $(s \times L)$ -матрица  $\hat{\Phi}_t^{(1)} = \Sigma G_1^T$  имеет полный строчный ранг, а  $\hat{\Delta}_t^{(real)(1)}$  – «проекция» матрицы  $\hat{\Delta}_t^{(real)}$  на подпространство  $\text{Im } \hat{\Phi}_t$ , т.е. ее строки являются проекциями строк матрицы  $\hat{\Delta}_t^{(real)}$  на подпространство  $\text{Im } \hat{\Phi}_t$ .

*Лемма 2.1. Множество  $\Delta_t^{(p)}$  матриц, согласованных с экспериментальными данными  $\hat{\Phi}_t = \text{col}(\Phi_t, U_t)$ , для которых верно (2.9), представляет собой неограниченный вырожденный «матричный эллипсоид», определяемый неравенством*

$$(2.11) \quad (\hat{\Delta}_t^{(1)} - \hat{\Delta}_t^{(LS)(1)}) \Sigma^2 (\hat{\Delta}_t^{(1)} - \hat{\Delta}_t^{(LS)(1)})^T \leq \hat{\Omega}_t,$$

где  $\hat{\Delta}_t^{(LS)(1)} = \tilde{\Phi}_{t+1} \hat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2}$  – оценка методом наименьших квадратов матрицы  $\hat{\Delta}_t^{(real)(1)}$  в (2.10).

*Следствие 2.1. Множество  $\Delta_t^{(p)}$  ограничено тогда и только тогда, когда выполнено ранговое условие*

$$(2.12) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi_t \\ U_t \end{pmatrix} = n_x + n_u.$$

В этом случае множество  $\Delta_t^{(p)}$  состоит из матриц, определяемых неравенством (2.11), в котором  $\hat{\Delta}_t^{(1)} = \hat{\Delta}_t$  и  $\hat{\Delta}_t^{(LS)(1)} = \hat{\Delta}_t^{(LS)}$ .



Доказательства этой и последующих лемм приведены в Приложении. Из этой леммы следует, что по полученным данным в общем случае можно идентифицировать только  $\widehat{\Delta}_t^{(real)(1)}$  – «проекцию» неизвестной матрицы на подпространство  $\text{Im } \widehat{\Phi}_t$ . При выполнении рангового условия (2.12) матрица  $\Delta_t^{(real)}$  в (2.4) идентифицируема, а «матричный эллипсоид» и соответственно множество  $\Delta_t^{(p)}$  ограничены. Отметим, что для выполнения рангового условия (2.12) необходимо, чтобы количество измерений было не меньше, чем сумма размерностей векторов состояния и управления, т.е.  $N \geq n_x + n_u$ . В отличие от [4] в рассматриваемом здесь синтезе робастного управления не требуется выполнения рангового условия и количество экспериментов может быть меньше, чем  $n_x + n_u$ . Как будет показано далее и продемонстрировано на примере, если ранговое условие не выполнено и соответственно информационная матрица вырождена, то ограничение области неопределенности происходит за счет использования априорной информации.

*Замечание 2.* Если неизвестная нестационарная система (2.1) является периодической с известным периодом  $T$ , то матрицы экспериментальных данных могут быть сформированы по измерениям одной траектории на интервале  $[0, LT]$ . Для этого при  $t = 0, \dots, T$  обозначим матрицы

$$\begin{aligned} \Phi_t &= (x_t \ x_{T+t} \ \dots \ x_{(L-1)T+t}), & U_t &= (u_t \ u_{T+t} \ \dots \ u_{(L-1)T+t}), \\ W_t &= (w_t \ w_{T+t} \ \dots \ w_{(L-1)T+t}), & Z_t &= (z_t \ z_{T+t} \ \dots \ z_{(L-1)T+t}) \end{aligned}$$

и получим уравнения, аналогичные (2.4), и соответственно неравенства, аналогичные (2.7) при  $t = 0, \dots, T - 1$ .

*Замечание 3.* Для неизвестной стационарной системы вида (2.1), для которой, в частности, можно провести только один эксперимент, т.е. выбрать  $L = 1$ , из матриц (2.2) составим матрицы

$$\begin{aligned} \Phi_{[0, N-1]} &= (\Phi_0 \ \dots \ \Phi_{N-1}), & \Phi_{[1, N]} &= (\Phi_1 \ \dots \ \Phi_N), \\ U_{[0, N-1]} &= (U_0 \ \dots \ U_{N-1}), & Z_{[0, N-1]} &= (Z_0 \ \dots \ Z_{N-1}), \\ W_{[0, N-1]} &= (W_0 \ \dots \ W_{N-1}). \end{aligned}$$

В этом случае имеет место уравнение  $\widetilde{\Phi} = \Delta^{(real)} \widehat{\Phi} + \widehat{W}$ , в котором

$$\widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{[0, N-1]} \\ U_{[0, N-1]} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{[1, N]} \\ Z_{[0, N-1]} \end{pmatrix}, \quad \widehat{W} = \begin{pmatrix} W_{[0, N-1]} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда аналогичным образом приходим к неравенству вида (2.7) со стационарной матрицей  $\Psi^{(1)}$  относительно неизвестной матрицы параметров  $\Delta$ .

## 2.2. Априорная информация

Пусть, как это принято в традиционных методах синтеза робастного управления, имеется дополнительная информация о том, что неизвестные

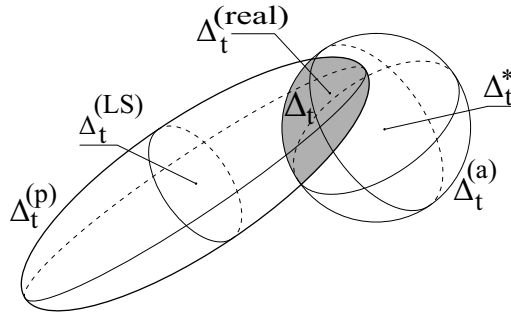


Рис. 1. Множества  $\Delta_t^{(p)}$ ,  $\Delta_t^{(a)}$  и  $\Delta_t$  матриц, согласованных только с экспериментальными, только с априорными и с экспериментальными и априорными данными.

матрицы  $\Delta_t^{(real)}$ ,  $t = 0, \dots, N - 1$  удовлетворяют ограничениям

$$(2.13) \quad (\Delta_t - \Delta_t^*)(\Delta_t - \Delta_t^*)^T \leq \rho_t^2 I, \quad \Delta_t^* = \begin{pmatrix} A_t^* & B_t^* \\ C_t^* & D_t^* \end{pmatrix},$$

в которых  $\Delta_t^*$  и  $\rho_t$  – заданные матрицы и скаляры, характеризующие центры и радиусы «матричных сфер». Запишем это неравенство в виде

$$(2.14) \quad (\Delta_t \quad I) \Psi^{(2)}(t) (\Delta_t \quad I)^T \leq 0,$$

где матрица  $\Psi^{(2)}(t)$  состоит из блоков  $\Psi_{ij}^{(2)}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$  и имеет вид

$$(2.15) \quad \Psi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} I & | & \star \\ \hline - & - & - \\ -\Delta_t^* & | & \Delta_t^* \Delta_t^{*T} - \rho_t^2 I \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\Delta_t^{(a)}$  множество матриц  $\Delta_t$ , удовлетворяющих для данного  $t$  неравенству (2.14), и через  $\Delta_t = \Delta_t^{(p)} \cap \Delta_t^{(a)}$  множество матриц, удовлетворяющих неравенствам (2.7) и (2.14). Таким образом,  $\Delta_t$  – это множество всех матриц  $\Delta_t$ , согласованных при данном  $t$  с экспериментальными и априорными данными. Очевидно, что  $\Delta_t^{(real)} \in \Delta_t$ . На рис. 1 для иллюстрации схематично изображен один из возможных вариантов расположения множеств  $\Delta_t^{(p)}$ ,  $\Delta_t^{(a)}$  и их пересечения  $\Delta_t$ .

Обозначим набор матриц  $\Delta_{[0, N-1]} = (\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1})$ , согласованных только с экспериментальными, только с априорными и с теми и другими данными для всех  $t = 0, \dots, N - 1$  соответственно через  $\Delta_{[0, N-1]}^{(p)} = (\Delta_0^{(p)}, \dots, \Delta_{N-1}^{(p)})$ ,  $\Delta_{[0, N-1]}^{(a)} = (\Delta_0^{(a)}, \dots, \Delta_{N-1}^{(a)})$  и  $\Delta_{[0, N-1]} = (\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1})$ .

### 2.3. Цели управления

Качество неопределенной системы (2.1), замкнутой управлением вида линейной нестационарной обратной связи по состоянию  $u(t) = \Theta_t x(t)$ , будем

оценивать максимально возможным уровнем гашения начального и внешнего возмущений, т.е. верхней границей обобщенной  $H_\infty$ -нормы замкнутой системы при всех матрицах системы, согласованных с экспериментальными и априорными данными:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} & \gamma_{g\infty}(\Theta_{[0,N-1]}; R, S) = \\ & = \sup_{\Delta_{[0,N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0,N-1]}} \sup_{x_0, w} \left( \frac{\|z\|_{[0,N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1}x_0 + \|w\|_{[0,N-1]}^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $R = R^T > 0$  и  $S = S^T > 0$  – весовые матрицы начального и терминального состояний соответственно,  $\|\xi\|_{[0,t]}^2 = \sum_{i=0}^t |\xi(i)|^2$ . Смысл этого критерия можно пояснить следующим образом. Состояние системы в текущий момент времени зависит линейно от начальных условий и возмущений, и их увеличение приводит к соответствующему увеличению переменных состояния. Для того чтобы характеризовать поведение системы при неопределенных начальных условиях и возмущениях, нормализуем соответствующий функционал величиной, равной указанной в знаменателе сумме, или, что то же самое для линейной системы, ограничим эту сумму единицей. Для стационарной системы на бесконечном горизонте в (2.16) следует положить  $S = 0$ ,  $N = \infty$  и  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ , где  $\mathbf{\Delta}$  – множество неизвестных матриц системы, согласованных с экспериментальными и априорными данными.

Когда начальное состояние нулевое, обобщенная  $H_\infty$ -норма превращается в стандартную  $H_\infty$ -норму

$$(2.17) \quad \gamma_\infty(\Theta_{[0,N-1]}; S) = \sup_{\Delta_{[0,N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0,N-1]}} \sup_{w \neq 0} \frac{\left( \|z\|_{[0,N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N) \right)^{1/2}}{\|w\|_{[0,N-1]}},$$

что соответствует  $R \rightarrow 0$  в обобщенной  $H_\infty$ -норме (2.16). При отсутствии внешнего возмущения, т.е. при  $w(t) \equiv 0$ , критерий (2.16) принимает вид  $\gamma_0$ -нормы

$$(2.18) \quad \begin{aligned} & \gamma_0(\Theta_{[0,N-1]}; R, S) = \\ & = \sup_{\Delta_{[0,N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0,N-1]}} \sup_{x_0 \neq 0} \left( \frac{\|z\|_{[0,N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1}x_0} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

характеризующей максимальное значение квадратичного функционала на траекториях системы при начальных состояниях, принадлежащих эллипсоиду  $x^T R^{-1}x \leq 1$ . Если в уравнении (2.1) имеем  $C_t \equiv 0$  и  $D_t \equiv 0$ , то получим верхнюю границу максимального уклонения терминального состояния замкнутой неопределенной системы

$$(2.19) \quad \begin{aligned} & \gamma_N(\Theta_{[0,N-1]}; R, S) = \\ & = \sup_{\Delta_{[0,N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0,N-1]}} \sup_{x_0, w} \left( \frac{x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1}x_0 + \|w\|_{[0,N-1]}^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В дальнейшем там, где это не является необходимым, весовые матрицы в качестве аргументов рассматриваемых норм будут опускаться.

Задача заключается в том, чтобы, не имея и не строя математическую модель системы, синтезировать управление, при котором один из перечисленных выше критериев ограничен заданной константой, т.е. в общем случае  $\gamma_{g\infty}(\Theta_{[0, N-1]}) \leq \gamma$ .

### 3. Анализ заданной системы на основе функции Ляпунова двойственной системы

Для заданной системы

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= \mathcal{A}_t x(t) + \mathcal{B}_t v(t), & x(0) &= x_0, \\ z(t) &= \mathcal{C}_t x(t) + \mathcal{D}_t v(t), & t &= 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

обобщенной  $H_\infty$ -нормой с весовыми матрицами  $R > 0$  и  $S > 0$  начального и терминального состояний называется максимальное значение квадратного корня из отношения суммы квадрата  $l_2$ -нормы выхода и квадратичной формы терминального состояния системы к сумме квадратичной формы начального состояния и квадрата  $l_2$ -нормы возмущения, т.е.

$$(3.2) \quad \|H\|_{g\infty}(R, S) = \sup_{x_0, v} \left( \frac{\|z\|_{[0, N-1]}^2 + x^T(N) S x(N)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, N-1]}^2} \right)^{1/2},$$

где супремум берется по всем начальным состояниям  $x(0) = x_0$  и всем возмущениям  $v \in l_2$ , одновременно не обращающимся в ноль.

Известна следующая характеристика обобщенной  $H_\infty$ -нормы на конечном интервале в терминах функции Ляпунова, которая приводит к вычислению этой нормы с помощью линейных матричных неравенств.

*Лемма 3.1* [16]. *Обобщенная  $H_\infty$ -норма (3.2) системы (3.1) удовлетворяет условию  $\|H\|_{g\infty}(R, S) \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда для приращения функции  $V_t(x) = x^T X_t x$  с  $X_t = X_t^T > 0$ ,  $X_0 \leq \gamma^2 R^{-1}$  и  $X_N = S$  по траектории системы для всех  $t \in [0, N-1]$  верны неравенства*

$$(3.3) \quad V_{t+1}(x(t+1)) - V_t(x(t)) + |z(t)|^2 - \gamma^2 |v(t)|^2 \leq 0.$$

*Замечание 4.* Для стандартной  $H_\infty$ -нормы из приведенных в лемме 3.1 условий исчезает неравенство  $X_0 \leq \gamma^2 R^{-1}$ , а для  $\gamma_0$ -нормы и максимального уклонения терминального состояния в неравенстве (3.3) исчезают соответственно слагаемое  $\gamma^2 |v(t)|^2$  и слагаемое  $|z(t)|^2$ .

Сформулируем две леммы, доказательства которых приведены в Приложении, позволяющие установить соответствие между обобщенными  $H_\infty$ -нормами прямой и двойственной систем. Предварительно напомним, что обобщенная  $H_\infty$ -норма является индуцированной нормой линейного оператора,

порождаемого системой (3.1) и отображающего пару  $(x_0, v(t)) \in \mathbb{R}^{n_x} \times l_2 = \Xi_1$ , состоящую из начального состояния и возмущения на входе, в пару  $(x(N), z(t)) \in \mathbb{R}^{n_x} \times l_2 = \Xi_2$ , состоящую из терминального состояния и целевого выхода, т.е.  $\|H\|_{g_\infty} = \|\Gamma_{g_\infty}\|$ , где

$$\Gamma_{g_\infty} : \Xi_1 = \mathbb{R}^{n_x} \times l_2[0, N-1] \rightarrow \Xi_2 = \mathbb{R}^{n_x} \times l_2[0, N-1] : (x_0, v) \rightarrow (x(N), z).$$

Скалярные произведения в этих пространствах определяются как

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Xi_1} &= x_1^T(0)R^{-1}x_2(0) + \langle v_1(t), v_2(t) \rangle_{l_2}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Xi_2} &= x_1^T(N)Sx_2(N) + \langle z_1(t), z_2(t) \rangle_{l_2}. \end{aligned}$$

*Лемма 3.2.* *Спряженный оператор  $\Gamma_{g_\infty}^*$  и его норма определяются как*

$$(3.4) \quad \Gamma_{g_\infty}^* : \Xi_2 \rightarrow \Xi_1 : (S^{-1}\hat{x}(N), \hat{v}(t)) \rightarrow (R\hat{x}(0), \hat{z}(t)),$$

$$\|\Gamma_{g_\infty}^*\| = \sup_{\hat{x}(N), \hat{v}} \left[ \frac{\|\hat{z}\|_{[0, N-1]}^2 + \hat{x}^T(0)R\hat{x}(0)}{\hat{x}^T(N)S^{-1}\hat{x}(N) + \|\hat{v}\|_{[0, N-1]}^2} \right]^{1/2},$$

где  $\hat{x}(t)$  и  $\hat{z}(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \mathcal{A}_t^T \hat{x}(t+1) + \mathcal{C}_t^T \hat{v}(t), \\ \hat{z}(t) &= \mathcal{B}_t^T \hat{x}(t+1) + \mathcal{D}_t^T \hat{v}(t), \quad t = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

*Лемма 3.3.* *Обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовыми матрицами  $R$  и  $S$  начального и терминального состояний системы (3.1) совпадает с обобщенной  $H_\infty$ -нормой с весовыми матрицами  $S$  и  $R$  начального и терминального состояний двойственной системы*

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x_d(t+1) &= \mathcal{A}_{N-1-t}^T x_d(t) + \mathcal{C}_{N-1-t}^T v_d(t), \\ z_d(t) &= \mathcal{B}_{N-1-t}^T x_d(t) + \mathcal{D}_{N-1-t}^T v_d(t), \quad t = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

т.е.

$$(3.7) \quad \begin{aligned} &\sup_{x_0, v} \left( \frac{\|z\|_{[0, N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, N-1]}^2} \right)^{1/2} = \\ &= \sup_{x_d(0), v_d} \left[ \frac{\|z_d\|_{[0, N-1]}^2 + x_d^T(N)R x_d(N)}{x_d^T(0)S^{-1}x_d(0) + \|v_d\|_{[0, N-1]}^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

*Следствие 3.1.* *Максимальное уклонение  $\gamma_N(R, S)$  терминального состояния системы (3.1) совпадает с  $\gamma_0(S, R)$ -нормой двойственной системы (3.6), в которой  $\mathcal{C}_t \equiv 0$  и  $\mathcal{D}_t \equiv 0$ , т.е.*

$$(3.8) \quad \begin{aligned} &\sup_{x_0, v} \left( \frac{x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, N-1]}^2} \right)^{1/2} = \\ &= \sup_{x_d(0) \neq 0} \left( \frac{\|z_d\|_{[0, N-1]}^2 + x_d^T(N)R x_d(N)}{x_d^T(0)S^{-1}x_d(0)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

и соответственно  $\gamma_0(R, S) = \gamma_N^{(d)}(S, R)$ . Стандартная  $H_\infty$ -норма системы (3.1) следующим образом выражается в терминах двойственной системы (3.6):

$$\begin{aligned} & \sup_{x_0=0, v \neq 0} \frac{\left( \|z\|_{[0, N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N) \right)^{1/2}}{\|v\|_{[0, N-1]}} = \\ & = \sup_{x_d(0), v_d} \frac{\|z_d\|_{[0, N-1]}}{\left( x_d^T(0)S^{-1}x_d(0) + \|v_d\|_{[0, N-1]}^2 \right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Учитывая согласно лемме 3.3 равенство соответствующих обобщенных  $H_\infty$ -норм и прямой и двойственной систем и применяя для нормы  $\|H^{(d)}\|_{g\infty}(S, R)$  двойственной системы (3.6) лемму 3.1, приходим к следующей характеристике обобщенной  $H_\infty$ -нормы исходной системы.

*Теорема 3.1.* Для системы (3.1) выполняется условие  $\|H\|_{g\infty}(R, S) \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда существует функция  $\widehat{V}_t(x_d) = x_d^T P_t x_d$  с  $P_t > 0$ ,  $P_0 \leq \gamma^2 S^{-1}$  и  $P_N = R$ , приращение которой по траектории двойственной системы (3.6) при всех  $t = 0, \dots, N-1$  удовлетворяет неравенствам

$$(3.9) \quad \widehat{V}_{t+1}(x_d(t+1)) - \widehat{V}_t(x_d(t)) + |z_d(t)|^2 - \gamma^2 |v_d(t)|^2 \leq 0.$$

*Замечание 5.* При аналогичной характеристике  $\gamma_0$ -нормы и максимального отклонения терминального состояния в неравенстве (3.9) исчезнут соответственно слагаемые  $|z_d(t)|^2$  и  $\gamma^2 |v_d(t)|^2$ , а для  $H_\infty$ -нормы в условиях теоремы 3.1 следует положить  $R = 0$  (см. замечание 4).

*Замечание 6.* Записывая неравенства (3.9) для квадратичных форм в матричном виде, приходим к линейным матричным неравенствам

$$(3.10) \quad \begin{pmatrix} -P_{t+1} & * & * & * \\ \mathcal{A}_{N-1-t}P_{t+1} & -P_t & * & * \\ \mathcal{C}_{N-1-t}P_{t+1} & 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \mathcal{B}_{N-1-t}^T & \mathcal{D}_{N-1-t}^T & -I \end{pmatrix} \leq 0, \\ P_0 \leq \gamma^2 S^{-1}, \quad P_N = R, \quad t = 0, \dots, N-1$$

относительно матриц  $P_t$ , которые разрешимы тогда и только тогда, когда  $\|H\|_{g\infty}(R, S) \leq \gamma$ .

*Замечание 7.* Матрицы функций  $V_t(x) = x^T X_t x$  и  $\widehat{V}_t(x_d) = x_d^T P_t x_d$  прямой и двойственной систем связаны соотношением  $P_t = \gamma^2 X_{N-t}^{-1}$ . Это непосредственно проверяется, если в неравенствах (3.10) осуществить замену  $P_t = \gamma^2 X_{N-t}^{-1}$  и стандартным образом прийти к тому, что для функции  $V(x) = x^T X_t x$  по траектории системы (3.1) выполняется неравенство (3.3).

*Замечание 8.* Для стационарной системы все указанные функции Ляпунова имеют постоянные матрицы, а матрица  $P \geq R$  удовлетворяет стационарному варианту первого неравенства (3.10) [16].

#### 4. Синтез законов управления неопределенной системой

##### 4.1. Обобщенное $H_\infty$ -управление на конечном горизонте

Опишем основные шаги получения по экспериментальным и априорным данным верхней границы обобщенной  $H_\infty$ -нормы с весовыми матрицами  $R$  и  $S$  и соответствующих параметров  $\Theta_t$  законов управления для неопределенной системы (2.1). Уравнения замкнутой системы имеют вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (A_t + B_t \Theta_t) x(t) + w(t), \\ z(t) &= (C_t + D_t \Theta_t) x(t). \end{aligned}$$

Учитывая введенные обозначения, представим эти уравнения в виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (I_{n_x} \ 0_{n_x \times n_z}) \Delta_t \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_t \end{pmatrix} x(t) + w(t), \\ z(t) &= (0_{n_z \times n_x} \ I_{n_z}) \Delta_t \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_t \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

где  $\Delta_t$  – неизвестная  $(n_x + n_z) \times (n_x + n_u)$ -матрица,  $\Theta_t$  –  $(n_u \times n_x)$ -матрица параметров регулятора. Запишем уравнения двойственной системы:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} x_d(t+1) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^\top \Delta_{N-1-t}^\top \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} x_d(t) + \\ &+ \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^\top \Delta_{N-1-t}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w_d(t), \\ z_d(t) &= x_d(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим также систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом  $w_\Delta(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_u}$  и выходом  $z_\Delta(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_z}$ , определяемую уравнениями

$$(4.4) \quad \begin{aligned} x_a(t+1) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^\top w_\Delta(t), \\ z_a(t) &= x_a(t), \quad z_\Delta(t) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} x_a(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w_a(t), \end{aligned}$$

в которых  $x_a(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – состояние,  $w_a(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  – возмущение,  $z_a(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – целевой выход. Допустим, что дополнительный входной сигнал  $w_\Delta(t)$  в системе (4.4) при всех  $t \geq 0$  удовлетворяет неравенствам

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^\top \Psi^{(k)}(N-1-t) \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0, \quad k = 1, 2,$$

где матрицы  $\Psi^{(k)}(t)$  заданы в (2.8) и (2.15). Множество всех таких сигналов  $w_\Delta(t)$  обозначим через  $\mathbf{W}_\Delta$ . Определим уровень гашения возмущений с весовыми матрицами  $S > 0$  и  $R > 0$  системы (4.4), (4.5) как

$$\hat{\gamma}_{g\infty}(S, R) = \sup_{w_\Delta \in \mathbf{W}_\Delta} \sup_{x_a(0), w_a} \left( \frac{\|z_a\|_{[0, N-1]}^2 + x_a^T(N) R x_a(N)}{x_a^T(0) S^{-1} x_a(0) + \|w_a\|_{[0, N-1]}^2} \right)^{1/2}.$$

Заметим, что при  $w_\Delta(t) = \Delta_{N-1-t}^T z_\Delta(t)$  уравнения (4.4) совпадают с уравнениями (4.3) и выполняются следующие неравенства при  $k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(k)}(N-1-t) \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} = \\ & = z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \Delta_{N-1-t}^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi^{(k)}(N-1-t) \begin{pmatrix} \Delta_{N-1-t}^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $w_\Delta(t) = \Delta_{N-1-t}^T z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$  и, следовательно, система (4.3) при всех  $\Delta_{[0, N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0, N-1]}$  «погружена» в расширенную систему (4.4), (4.5), а обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовыми матрицами  $S > 0$  и  $R > 0$  двойственной системы (4.3) не превышает уровень гашения возмущений  $\hat{\gamma}_{g\infty}(S, R)$ . Сформулируем и докажем следующее основное утверждение.

*Теорема 4.1. Верхняя граница обобщенной  $H_\infty$ -нормы с весовыми матрицами  $R$  и  $S$  неопределенной системы (2.1) при законе управления  $u(t) = \Theta_t x(t)$  с  $\Theta_{N-1-t} = Q_{t+1} P_{t+1}^{-1}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$  удовлетворяет неравенству  $\gamma_{g\infty}(\Theta_{[0, N-1]}; R, S) \leq \gamma$ , если следующие линейные матричные неравенства разрешимы относительно  $P_t = P_t^T > 0$ ,  $Q_t$  и  $\mu_t^{(k)} \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ :*

$$(4.6) \quad \begin{pmatrix} -P_{t+1} & * & * \\ \begin{pmatrix} P_{t+1} \\ Q_{t+1} \end{pmatrix} & -\sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \Psi_{11}^{(k)} & * \\ 0 & -\sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \Psi_{21}^{(k)} & -\sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \Psi_{22}^{(k)} + K_t \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$K_t = \begin{pmatrix} I - P_t & * \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix}, \quad P_N = R, \quad P_0 \leq \gamma^2 S^{-1},$$

в которых  $\Psi_{ij}^{(k)} = \Psi_{ij}^{(k)}(N-1-t)$ ,  $i, j = 1, 2$  обозначают соответствующие блоки матриц  $\Psi^{(k)}(N-1-t)$ , а матрицы  $\Psi^{(k)}(t)$  заданы в (2.8) и (2.15).

*Доказательство теоремы 4.1.* Согласно лемме 3.3 обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовыми матрицами  $R > 0$  и  $S > 0$  исходной системы при каждом  $\Delta_{[0, N-1]}$  совпадает с обобщенной  $H_\infty$ -нормой с весовыми матрицами  $S > 0$  и  $R > 0$  двойственной системы (4.3). Так как система (4.3) при



$\Delta_{[0, N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0, N-1]}$  «погружена» в расширенную систему (4.4), (4.5), то указанная ее норма не превышает уровень гашения возмущений  $\widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R)$  системы (4.4), (4.5). В свою очередь,  $\widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R) \leq \gamma$ , если существует функция  $V_t(x_a) = x_a^T P_t x_a$  с  $P_t > 0$ ,  $P_0 \leq \gamma^2 S^{-1}$  и  $P_N = R$ , для которой по траектории расширенной системы при всех  $t = 0, \dots, N-1$  выполняются неравенства

$$(4.7) \quad \Delta V_t + |z_a(t)|^2 - \gamma^2 |w_a(t)|^2 \leq 0$$

для всех  $w_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$ , удовлетворяющих неравенствам (4.5). В этом можно убедиться, если сложить неравенства (4.7) при  $t = 0, \dots, N-1$  и принять во внимание начальное и терминальное условия для матрицы  $P_t$ .

Далее, согласно  $S$ -процедуре для выполнения (4.7) при ограничениях (4.5) достаточно выполнения неравенств

$$(4.8) \quad \Delta V_t + |z_a(t)|^2 - \gamma^2 |w_a(t)|^2 - \sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(k)}(N-1-t) \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0$$

для всех  $x_a(t)$ ,  $w_a(t)$ ,  $w_\Delta(t)$  и некоторых  $\mu_t^{(k)} \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ , где  $z_a(t) = x_a(t)$  и  $z_\Delta(t) = \text{col}(x_a(t), w_a(t))$ . Таким образом, если выполнены неравенства (4.8), то  $\gamma_{g\infty}(\Theta_{[0, N-1]}; R, S) \leq \widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R) \leq \gamma$ . Записывая неравенства (4.8) в виде матричных неравенств

$$\left( \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix} P_{t+1} \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^T \quad \star \\ 0 \quad K_t \right) - \sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \Psi^{(k)}(N-1-t) \leq 0,$$

вводя новые матричные переменные  $Q_{t+1} = \Theta_{N-1-t} P_{t+1}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$  и применяя лемму Шура, стандартным образом получим неравенства (4.6). Теорема доказана.

*Замечание 9.* Как показано в [17, теорема 4.1],  $S$ -процедура может быть неущербной при двух квадратичных ограничениях, если применительно к рассматриваемой задаче при некоторых  $\alpha_t^{(1)}$  и  $\alpha_t^{(2)}$  выполняется неравенство  $\alpha_t^{(1)} \Psi^{(1)}(t) + \alpha_t^{(2)} \Psi^{(2)}(t) > 0$  для всех  $t$  (что проверяется непосредственным решением этих линейных матричных неравенств относительно  $\alpha_t^{(1)}$  и  $\alpha_t^{(2)}$ ). В этом случае условия теоремы 4.1 необходимы и достаточны для выполнения неравенства  $\widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R) \leq \gamma$ .

*Замечание 10.* При построении закона управления только по экспериментальным данным или только по априорной информации в силу неущербности  $S$ -процедуры с одним ограничением условия теоремы 4.1 являются не только достаточными, но также и необходимыми для выполнения неравенства  $\widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R) \leq \gamma$ .

*Замечание 11.* Если в уравнении (4.1) возмущение представимо в виде  $w(t) = B_{v,t}v(t)$  (см. замечание 1), то из контекста следует, что целевой выход расширенной системы будет равен  $z_a(t) = B_{v,t}^T x_a(t)$ . Это приведет к тому, что при вычислении верхней границы обобщенной  $H_\infty$ -нормы неопределенной системы (4.1) относительно возмущения  $v(t)$  следует в блоках, стоящих в четвертой строке и четвертом столбце неравенств (4.6), заменить слагаемое  $I$  на  $B_{v,t}B_{v,t}^T$ .

*Замечание 12.* Для стационарной системы (см. замечание 3) верхняя граница обобщенной  $H_\infty$ -нормы с весовой матрицей начального состояния  $R$  при законе управления  $u(t) = \Theta x(t)$ , где  $\Theta = QP^{-1}$ , удовлетворяет неравенству  $\gamma_{g\infty}(\Theta; R) \leq \gamma$ , если «стационарное» первое линейное матричное неравенство в (4.6) разрешимо относительно  $P = P^T > R$ ,  $Q$  и  $\mu^{(k)} \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ . Этот результат при  $L = 1$  согласуется с соответствующим результатом в [14].

Назовем гарантированными и обозначим через  $\gamma_{g\infty}^*$ ,  $\gamma_{g\infty}^{(a)}$  и  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$  минимальные верхние границы обобщенной  $H_\infty$ -нормы замкнутой системы, которые согласно теореме 4.1 могут быть достигнуты при законах управления, синтезированных по экспериментальным и априорным данным, только по априорным и только по экспериментальным данным соответственно. Это минимальные значения  $\gamma$ , для которых неравенства (4.6) разрешимы при  $\mu_t^{(k)} \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ , при  $\mu_t^{(1)} \equiv 0$ ,  $\mu_t^{(2)} \geq 0$  и при  $\mu_t^{(1)} \geq 0$ ,  $\mu_t^{(2)} \equiv 0$  соответственно. Из теоремы 4.1 непосредственно следует неравенство

$$\gamma_{g\infty}^* \leq \min \left\{ \gamma_{g\infty}^{(a)}, \gamma_{g\infty}^{(p)} \right\},$$

которое объясняет преимущество робастных законов управления, построенных по априорным и экспериментальным данным, над робастными законами управления, построенными только по априорным или только по экспериментальным данным. А именно, с одной стороны, когда априорная информация достаточно грубая, т.е. радиусы  $\rho_t$  матричных сфер в (2.13) достаточно велики и соответственно  $\gamma_{g\infty}^{(a)}$  принимает большое значение, то  $\gamma_{g\infty}^*$  может оказаться малой, если помехи в измерениях не очень большие, т.е. небольшими являются матричные эллипсоиды  $\Delta_t^{(p)}$ . С другой стороны, если помехи в измерениях оказываются достаточно большими и соответственно большой является  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$  или, более того, если не выполняется ранговое условие и информационная матрица является вырожденной, а матричные эллипсоиды  $\Delta_t^{(a)}$  оказываются неограниченными, то  $\gamma_{g\infty}^*$  может тем не менее стать малой за счет малости радиусов матричных сфер при использовании априорной информации. Эти выводы будут подтверждены результатами математического моделирования в разделе 5.

#### 4.2. $\gamma_0$ -Управление на конечном горизонте

Пусть теперь по экспериментальным и априорным данным требуется построить управление, минимизирующее  $\gamma_0$ -норму. Допустим, что эксперимен-

тальные данные, как и ранее, удовлетворяют соотношениям (2.4). В отличие от изложенного выше синтеза обобщенного  $H_\infty$ -управления теперь уравнение (4.2) не содержит возмущения  $w(t)$ , уравнение двойственной системы (4.3) не содержит целевого выхода  $z_d(t)$  (см. замечание 5), а уравнение расширенной системы (4.4) не содержит целевого выхода, т.е.  $z_a(t) \equiv 0$ . В соответствие с этим в неравенствах (4.8) исчезает слагаемое  $|z_a(t)|^2$ . В конечном итоге это приводит к тому, что верхняя граница  $\gamma_0$ -нормы неопределенной системы (2.1) не превышает  $\gamma$ , если разрешимы неравенства (4.6), в которых в четвертой блочной строке и четвертом блочном столбце отсутствует слагаемое  $I$ . Заметим также, что при синтезе стандартного  $H_\infty$ -управления в условиях теоремы 4.1 следует положить  $R = 0$ .

#### 4.3. Управление максимальным уклонением терминального состояния

Рассмотрим синтез управления по экспериментальным и априорным данным для минимизации заданного в (2.19) максимального уклонения терминального состояния  $\gamma_N^*(\Theta_{[0, N-1]}; R, S)$  в неопределенной системе

$$(4.9) \quad x(t+1) = A_t x(t) + B_t u(t) + w(t), \quad x(0) = x_0.$$

Так как целевой выход в системе отсутствует, то в этом случае матрицы с экспериментальными данными удовлетворяют уравнению

$$(4.10) \quad \Phi_{t+1} = \Delta_t^{(real)} \widehat{\Phi}_t + W_t,$$

в котором  $\Delta_t^{(real)} = (A_t^{(real)} \ B_t^{(real)})$ , а остальные матрицы заданы в (2.2) и  $W_t W_t^T \leq \Omega_t$ . Матрицы  $\Delta_t$ , согласованные с экспериментальными данными, определяются неравенствами (2.7), в которых теперь

$$(4.11) \quad \Psi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}_t \widehat{\Phi}_t^T & | & * \\ \hline - & - & - \\ -\Phi_{t+1} \widehat{\Phi}_t^T & | & \Phi_{t+1} \Phi_{t+1}^T - \Omega_t \end{pmatrix},$$

и блоки этой матрицы обозначим как  $\Psi_{ij}^{(1)}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Матрицы  $\Delta_t$ , согласованные с априорными данными, определяются неравенствами (2.14), в которых  $\Delta_t^* = (A_t^* \ B_t^*)$ . Исходная система (4.9) представима уравнением

$$(4.12) \quad x(t+1) = \Delta_t \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_t \end{pmatrix} x(t) + w(t),$$

двойственная система описывается уравнением

$$(4.13) \quad \begin{aligned} x_d(t+1) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^T \Delta_{N-1-t}^T x_d(t), \\ z_d(t) &= x_d(t), \end{aligned}$$

а расширенная система – уравнением

$$(4.14) \quad \begin{aligned} x_a(t+1) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^T w_\Delta(t), \\ z_a(t) &= x_a(t), \quad z_\Delta(t) = x_a(t), \end{aligned}$$

в котором  $w_\Delta \in \mathbf{W}_\Delta$ . Аналогично доказательству теоремы 4.1 придем к неравенствам (4.8), в которых теперь  $w_a(t) \equiv 0$  и  $z_\Delta(t) = x_a(t)$ . Записывая эти неравенства в виде матричных неравенств, получим линейные матричные неравенства вида (4.6), которые определяют верхнюю границу максимального уклонения терминального состояния неопределенной системы при законе управления  $u(t) = \Theta_t x(t)$ , где  $\Theta_{N-1-t} = Q_{t+1} P_{t+1}^{-1}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$ .

## 5. Иллюстративный пример

Приведем результаты ряда экспериментов с системой, полученной путем дискретизации с шагом  $h$  уравнения Матье

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \sin \omega \tau) \varphi = u + v,$$

описывающего колебания параметрического осциллятора. Представим полученное уравнение в виде системы

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 1 & h \\ -\omega_0^2 [1 + \varepsilon \sin(\omega t h)] h & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} v(t), \\ z(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad t = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где  $x(t) = \text{col}(\varphi(th), \dot{\varphi}(th))$ ,  $|v(th)| \leq d_v$ ,  $\omega_0 = \pi$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $\varepsilon = 0,01$  и  $h = 0,2$ . Матрицы этих уравнений неизвестны и являются блоками матрицы  $\Delta_t^{(real)}$  для каждого  $t$ . Таким образом, система в каждый момент времени содержит 12 неизвестных параметров, а всего на горизонте  $N = 10$  имеет 120 неизвестных параметров. В качестве центра матричной сферы  $\Delta_t^{(a)}$  возьмем матрицу  $\Delta_t^*$ , которая соответствует линейному осциллятору, т.е. системе (5.1) при  $\varepsilon = 0$ . В эксперименте начальные условия и компоненты вектора управления выбирались случайно на интервале  $[-1, 1]$ , а возмущение также случайно на интервале  $[-d, d]$ . Весовые матрицы начального и терминального состояний равны  $R = 0,1I$  и  $S = 0,05I$  соответственно.

На рис. 2 сплошная кривая соответствует квадрату гарантированной обобщенной  $H_\infty$ -нормы  $\gamma_{g\infty}^*$  в зависимости от уровня возмущения  $d$  в эксперименте, полученной по экспериментальным и априорным данным на горизонте  $N = 10$  при трех экспериментах  $L = 3$  и с радиусами априорной неопределенности  $\rho_t \equiv 0,02$ . Точками отмечена прямая  $\gamma_{g\infty}^{(a)2} = 0,37$ , соответствующая квадрату гарантированной обобщенной  $H_\infty$ -нормы при использовании

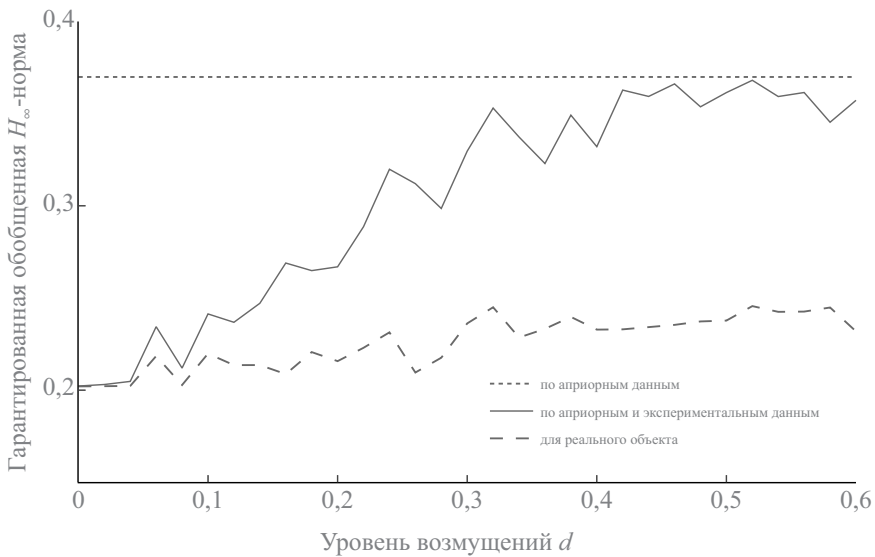


Рис. 2. Гарантированная обобщенная  $H_\infty$ -норма и обобщенная  $H_\infty$ -норма реального объекта при управлении на основе экспериментальных и априорных данных в зависимости от уровня возмущения.

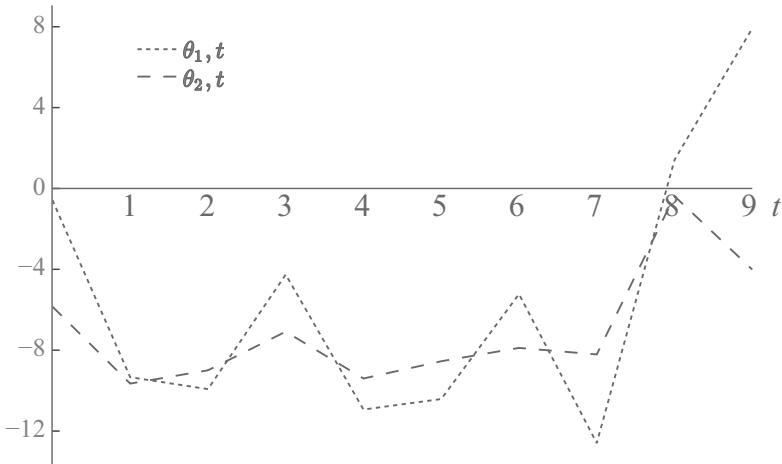


Рис. 3. Компоненты вектора параметров  $\Theta_t^*$  как функции времени.

только априорной информации, т.е. это то значение показателя, которое достигается при традиционном робастном управлении. Пунктирная кривая отвечает квадрату обобщенной  $H_\infty$ -нормы  $\gamma_{real} = \gamma_{g\infty}(\Delta_{[0,N-1]}^{(real)}, \Theta_{[0,N-1]}^*)$  замкнутой системы, состоящей из реального объекта с матрицами параметров  $\Delta_{[0,N-1]}^{(real)}$  (если бы они были известны) и обратных связей с матрицами параметров  $\Theta_{[0,N-1]}^*$ , соответствующих  $\gamma_{g\infty}^*$ . Из рисунка видно, насколько  $\gamma_{g\infty}^{*2}$  в зависимости от  $d$  меньше, чем  $\gamma_{g\infty}^{(a)2}$ , насколько  $\gamma_{g\infty}^{*2}$  превышает  $\gamma_{real}^2$  и насколько последняя, в свою очередь, превышает минимальное значение квадрата

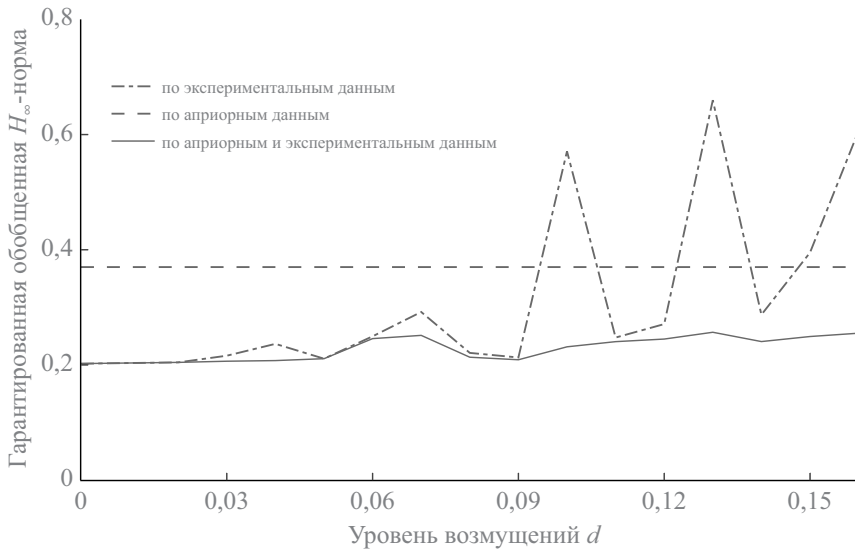


Рис. 4. Гарантированные обобщенные  $H_\infty$ -нормы как функции уровня возмущения для различных видов используемой информации.

обобщенной  $H_\infty$ -нормы реального объекта при оптимальном управлении для полностью известного объекта, равное  $\gamma^2 = 0,202$ . Рост кривой  $\gamma_{g\infty}^*$  с возрастанием  $d$  в эксперименте объясняется соответствующим увеличением размеров матричных эллипсоидов  $\Delta_t^{(p)}$ . На рис. 3 для примера приведены графики изменения во времени компонент вектора параметров управления  $\Theta_t^*$  при  $d = 0,48$ .

На рис. 4 приведены графики квадратов гарантированных обобщенных  $H_\infty$ -норм при использовании экспериментальных и априорных данных (сплошная кривая  $\gamma_{g\infty}^*$ ), только экспериментальных данных (штрих-пунктирная кривая  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$ ) и только априорной информации (пунктирная прямая  $\gamma_{g\infty}^{(a)}$ ). Для каждого уровня возмущений в эксперименте первые две нормы вычислялись при одних и тех же экспериментальных данных. Из рис. 4 видно, что  $\gamma_{g\infty}^*$  начиная с некоторого уровня возмущений в эксперименте, значительно меньше  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$  и всегда не превышает  $\gamma_{g\infty}^{(a)}$ , которое вычислялось при  $\rho_t \equiv 0,02$ . При управлении, которое получено только по экспериментальным данным без учета априорной информации, при больших ошибках в измерениях матричные эллипсоиды  $\Delta_t^{(p)}$  увеличиваются в размерах и гарантированный уровень гашения возмущений оказывается достаточно большим.

На рис. 5 так же, как на рис. 4, приведены графики квадратов гарантированных обобщенных  $H_\infty$ -норм при использовании экспериментальных и априорных данных (сплошная кривая  $\gamma_{g\infty}^*$ ) и только экспериментальных данных (штрих-пунктирная кривая  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$ ) с единственным отличием от эксперимента на рис. 4 – моделирование проведено при радиусах неопределенности в

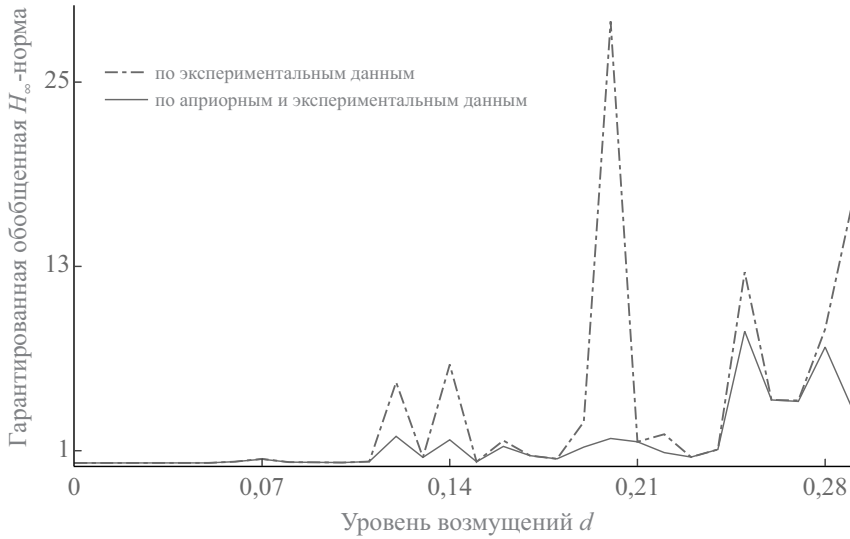


Рис. 5. Гарантированные обобщенные  $H_\infty$ -нормы при использовании экспериментальных и априорных и только экспериментальных данных, когда на основе только априорных данных решения не существует.

априорной информации  $\rho_t \equiv 0,6$ , для которых неравенства (4.6) при  $\mu_t^{(1)} \equiv 0$ ,  $\mu_t^{(2)} \geq 0$  неразрешимы. Рисунок показывает, что в случае недостатка априорной информации, когда область неопределенности приходится выбирать большой и гарантированное значение показателя в этой области оказывается огромным или даже не существует, использование этой информации в сочетании с экспериментальными данными позволяет тем не менее синтезировать системы с лучшим качеством, чем при использовании только экспериментальных данных.

На рис. 6 приведены графики квадратов гарантированных обобщенных  $H_\infty$ -норм при использовании экспериментальных и априорных данных в зависимости от уровня возмущения  $d$  в эксперименте для разного количества экспериментов:  $L = 1$  — штрих-пунктирная кривая,  $L = 3$  — сплошная кривая,  $L = 10$  — пунктирная кривая. Из этого рисунка видно, что, во-первых, даже при одном эксперименте, когда ранговое условие заведомо не выполняется и система неидентифицируема, гарантированный уровень гашения возмущений меньше, чем соответствующий уровень, полученный при робастном управлении по априорной информации; во-вторых, если ошибки в измерениях не очень большие, то при увеличении числа экспериментов уменьшается достигаемый гарантированный уровень гашения возмущений; в-третьих, если ошибки в измерениях достаточно большие, то указанный уровень почти не зависит от числа экспериментов и примерно равен  $\gamma_{g\infty}^{(a)2} = 0,37$ .

На рис. 7 приведены графики квадратов гарантированных обобщенных  $H_\infty$ -норм при использовании экспериментальных и априорных данных в зависимости от уровня возмущения  $d$  в эксперименте для различных значений

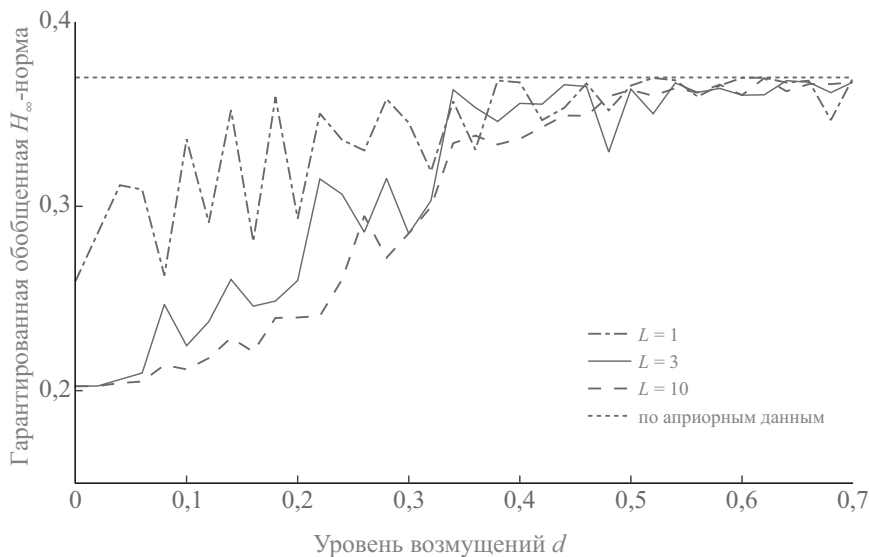


Рис. 6. Гарантированные обобщенные  $H_\infty$ -нормы как функции уровня возмущения для различного числа экспериментов.

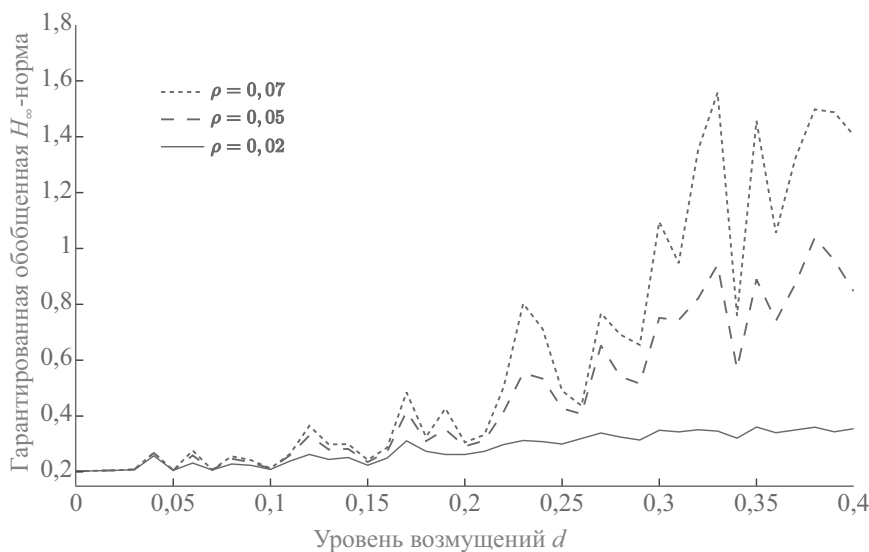


Рис. 7. Гарантированные обобщенные  $H_\infty$ -нормы как функции уровня возмущения при различных радиусах матричных сфер в априорной информации.

радиусов матричных сфер в априорной информации. С увеличением радиуса множество матриц  $\Delta_t$ , согласованных с априорными данными, расширяется и соответственно растет гарантированный уровень гашения возмущений в неопределенной системе.



## 6. Заключение

В статье теоретически обоснован и экспериментально подтвержден новый метод построения оптимальных законов управления линейными нестационарными объектами на конечном горизонте и линейными стационарными объектами на бесконечном горизонте по экспериментальным данным и априорной информации. Целью управления является минимизация обобщенной  $H_\infty$ -нормы замкнутой неопределенной системы, которая, в частности, характеризует уровни гашения внешнего и/или начального возмущений, максимальное отклонение терминального состояния, а в отсутствие внешнего возмущения – максимальное значение квадратичного функционала состояния и управления при неопределенных начальных условиях. Изучена зависимость качества синтезируемой системы управления от различных факторов: уровня возмущения в экспериментах, количества экспериментов, радиусов матричных сфер в априорной информации и др. Показано, что метод остается эффективным даже при небольшом объеме экспериментальных данных, когда не выполняются ни условие неисчезающего возбуждения, ни ранговое условие, необходимые для идентифицируемости объекта.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 2.1.* Запишем неравенство (2.6) в виде

$$\Delta_t \widehat{\Phi}_t \widehat{\Phi}_t^T \Delta_t^T - \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^T \Delta_t^T - \Delta_t \widehat{\Phi}_t \widetilde{\Phi}_{t+1}^T + \widetilde{\Phi}_{t+1} \widetilde{\Phi}_{t+1}^T - \widehat{\Omega}_t \leq 0$$

и с учетом замены переменных представим его как

$$\widehat{\Delta}_t^{(1)} \Sigma^2 \widehat{\Delta}_t^{(1)T} - \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \widehat{\Delta}_t^{(1)T} - \widehat{\Delta}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)} \widetilde{\Phi}_{t+1}^T + \widetilde{\Phi}_{t+1} \widetilde{\Phi}_{t+1}^T - \widehat{\Omega}_t \leq 0.$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$\left[ \widehat{\Delta}_t^{(1)} - \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2} \right] \Sigma^2 \left[ \widehat{\Delta}_t^{(1)} - \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2} \right]^T \leq \Gamma_t,$$

где

$$\Gamma_t = \widehat{\Omega}_t + \widetilde{\Phi}_{t+1} \left[ \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2} \widehat{\Phi}_t^{(1)} - I \right] \widetilde{\Phi}_{t+1}^T.$$

Подставляя сюда выражение для  $\widetilde{\Phi}_{t+1}$  из (2.10) и учитывая, что  $\widehat{\Phi}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} = \Sigma^2$ , получим  $\Gamma_t = \widehat{\Omega}_t \geq 0$ . Вычисляя градиент по  $\widehat{\Delta}_t^{(1)}$  от матричной нормы невязки, т.е. функции  $\text{tr}(\widetilde{\Phi}_{t+1} - \widehat{\Delta}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)})^T (\widetilde{\Phi}_{t+1} - \widehat{\Delta}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)})$ , и приравнявая его к нулю  $-2\widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} + 2\widehat{\Delta}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} = 0$ , выразим оценку  $\Delta_t^{(LS)(1)}$  методом наименьших квадратов неизвестной матрицы  $\Delta_t^{(real)(1)}$  в (2.10) как  $\widehat{\Delta}_t^{(LS)(1)} = \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2}$ .

*Доказательство леммы 3.2.* В силу уравнений (3.1) и (3.5) имеем

$$x^T(t+1)\widehat{x}(t+1) - x^T(t)\widehat{x}(t) = v^T(t)\widehat{z}(t) - z^T(t)\widehat{v}(t).$$

Суммируя эти уравнения по  $t = 0, \dots, N - 1$ , получим

$$x^T(N)S[S^{-1}\hat{x}(N)] + \langle z, \hat{v} \rangle_{l_2} = x^T(0)R^{-1}[R\hat{x}(0)] + \langle v, \hat{z} \rangle_{l_2}.$$

Таким образом,

$$\langle \Gamma_{g\infty}(x(0), v), (S^{-1}\hat{x}(N), \hat{v}) \rangle_{\Xi_2} = \langle (x(0), v), \Gamma_{g\infty}^*(S^{-1}\hat{x}(N), \hat{v}) \rangle_{\Xi_1},$$

что и требовалось доказать.

*Доказательство леммы 3.3.* Так как нормы сопряженных операторов равны, то согласно лемме 3.2 имеем  $\|\Gamma_{g\infty}\| = \|\Gamma_{g\infty}^*\|$ , где норма сопряженного оператора задана в (3.4). Сделаем в (3.5) замену времени  $t = N - 1 - \tau$ , обозначим  $\hat{x}(N - \tau) = x_d(\tau)$ ,  $\hat{v}(N - 1 - \tau) = v_d(\tau)$ ,  $\hat{z}(N - 1 - \tau) = z_d(\tau)$  и придем к уравнениям (3.6), в которых  $\tau$  заменено на  $t$ . Тогда оператор  $\Gamma_{g\infty}^*$  представим как

$$\Gamma_{g\infty}^* : (S^{-1}x_d(0), v_d(t)) \rightarrow (Rx_d(N), z_d(t))$$

и

$$\|\Gamma_{g\infty}^*\| = \sup_{x_d(0), v_d} \left[ \frac{\|z_d\|_{[0, N-1]}^2 + x_d^T(N)Rx_d(N)}{x_d^T(0)S^{-1}x_d(0) + \|v_d\|_{[0, N-1]}^2} \right]^{1/2},$$

что и требовалось доказать.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // *Automatica*. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
2. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
3. *Berberich J., Koch A., Scherer C.W., Allgower F.* Robust data-driven state-feedback design // *Proc. American Control Conference*. 2020. P. 1532–1538.
4. *Nortmann B., Mylvaganam T.* Direct data-driven control of LTV systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2023. V. 68. P. 4888–4895.
5. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen’s Lemma // *Automatica*. 2022. V. 145. Article 110537.
6. *Petersen I.R.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // *Syst. Control Lett.* 1987. V. 8. P. 351–357.
7. *Dörfler F., Tesi P., De Persis C.* On the Certainty-Equivalence Approach to Direct Data-Driven LQR Design // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2023. V. 68. P. 7989–7996.
8. *Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.

9. *Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M.* From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175.
10. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // *Вестн. Ленинград. ун-та. Математика.* 1977. Т. 4. С. 73–93.
11. *Berberich J., Scherer C.W., Allgower F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633.
12. *Scherer C.W.* “Robust mixed control and linear parameter-varying control with full block scalings” in *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control: SIAM*, 2000. P. 187–207.
13. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // *АиТ.* 2023. № 8. С. 24–42.
14. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез обобщенного  $H_\infty$ -субоптимального управления по экспериментальным и априорным данным // *АиТ.* 2024. № 1. С. 3–20.
15. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
16. *Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А.* Синтез обобщенного  $H_\infty$ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // *АиТ.* 2014. № 1. С. 3–22.
17. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // *J. Optim. Theory Appli.* 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 12.04.2024

После доработки 28.04.2024

Принята к публикации 30.04.2024

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Тематический выпуск

<b>Хлебников М.В.</b> Нехрупкая фильтрация при ограниченных внешних возмущениях . . . . .	3
<b>Честнов В.Н., Шатов Д.В.</b> Синтез робастных регуляторов многомерных систем при нестационарных параметрических и ограниченных внешних возмущениях . . . . .	19
<b>Шатов Д.В.</b> Одновременная стабилизация двумерных линейных переключаемых систем на основе сверхустойчивости и техники D-разбиения . . . . .	38
<b>Щербаков П.С.</b> Исследование эффекта всплеска решений одного класса разностных уравнений . . . . .	53
<b>Архипов П.А.</b> Алгоритм нахождения обобщенного Чебышевского центра множеств, заданных опорными функциями . . . . .	67
<b>Агаев Р.П., Хомутов Д.К.</b> О граничном значении запаздывания и асимптотике непрерывного протокола консенсуса первого порядка . . . . .	83
<b>Берлин Л.М., Галяев А.А., Лысенко П.В.</b> Необходимые условия экстремума и метод Нейштадта–Итона в задаче оптимального быстрогодействия группой несинхронных осцилляторов . . . . .	97
<b>Коган М.М., Степанов А.В.</b> Как улучшить робастное управление линейной нестационарной системой с помощью экспериментальных данных . . . . .	115

## CONTENTS

### Topical issue

<b>Khlebnikov M.V.</b> Nonfragile Filtering under Bounded Exogenous Disturbances . . . . .	3
<b>Chestnov V.N., Shatov D.V.</b> Robust Controller Design for Multivariable Systems with Non-Stationary Parameters Variations and Bounded External Disturbances . . . . .	19
<b>Shatov D.V.</b> Simultaneous Stabilization of Second Order Linear Switched Systems Based on Superstability and D-Decomposition Technique . . . . .	38
<b>Shcherbakov P.S.</b> Analysis of Peak Effects of Solutions of a Class of Difference Equations . . . . .	53
<b>Arkhipov P.A.</b> An Algorithm for Finding the Generalized Chebyshev Center of Sets Defined via Their Support Functions . . . . .	67
<b>Agayev R., Khomutov D.</b> On the Boundary Value of the Time-Delay and the Asymptotic Behavior of a Continuous First-Order Consensus Protocol . . . . .	83
<b>Berlin L.M., Galyaev A.A., Lysenko P.V.</b> Necessary Extremum Conditions and the Neustadt–Eaton Method in the Time-Optimal Control Problem for a Group of Non-synchronous Oscillators . . . . .	97
<b>Kogan M.M., Stepanov A.V.</b> How to Improve Robust Control of a Linear Time-Varying System by Using Experimental Data . . . . .	115